

Теория Морса и неравенства Морса для многообразий с краем

П.Е. Пушкарь

Аннотация

Мы обобщаем классические неравенства Морса для многообразия с краем.

Содержание

1	Функции на многообразии с краем и пары комплексов.	12
2	Пары M -комплексов. Формулировка основной теоремы.	22
3	О M -комплексах и M -парах с точностью до эквивалентности.	27
4	Доказательство теоремы 2.3.	35
5	Глифы. Лемма об M -модели.	44
6	Граф и раскраски. Допустимые многочлены.	49
7	Доказательство обобщенных неравенств Морса.	56
8	Пример. Классические и обобщенные неравенства Морса. Пример Арнольда.	60

Введение.

0.1. Классическая теория Морса изучает соотношения между множеством критических точек функции Морса на многообразии и топологией

этого многообразия. В этой статье мы рассматриваем случай многообразия с краем. В частности, мы решаем задачу Арнольда об оценке снизу числа критических точек функции Морса, общий росток которой вдоль края задан.

Вопрос Арнольда был мотивирован следующим замечательным примером, также построенным Арнольдом. Росток будет построен на крае замкнутого шара D^{n+1} . Рассмотрим вспомогательное связное замкнутое $(n + 1)$ -мерное многообразие W и функцию Морса H на ней. Выберем вложенный в W шар D^{n+1} , содержащий все критические точки функции H во внутренности. Ограничим функцию H на этот шар и возьмем ее росток f вдоль границы шара $\partial D^{n+1} = S^n$. Из любого продолжения ростка f до гладкой функции F на D^{n+1} можно построить гладкую функцию на W , взяв ее равной H на $W \setminus D^{n+1}$ и равной F на D^{n+1} . Если эта функция морсовская, то у нее “много” критических точек (по крайней мере сумма чисел Бетти $\sum b_i(W)$ многообразия W , согласно слабым неравенствам Морса для W). Вне шара D^{n+1} критических точек нет, поскольку их там нет у функции H . Следовательно, у функции F должно быть “много” критических точек, по крайней мере $\sum b_i(W)$. Число критических точек функции F (если они все морсовские) сравнительно элементарно оценивается снизу модулем индекса градиентного векторного поля вдоль $S^n = \partial D^{n+1}$, модуль этого индекса равен модулю эйлеровой характеристики $|\chi(W)|$. Поэтому эта конструкция особенно интересна в случае $\chi(W) = 0$, когда индекс градиента вдоль S^n не дает нетривиальной оценки на число критических точек у F . Это условие на эйлерову характеристику не особенно ограничительно – при $n > 2$ много многообразий с нулевой эйлеровой характеристикой и сколь угодно большой суммой чисел Бетти, например произведение сферы с большим числом ручек на тор. Замечательность этого примера еще и в том, что шар – многообразие с очень бедной топологией.

Отметим, что св наши дни “классическим” считается случай замкнутого многообразия, в котором край пуст. Во времена Морса это было не так. Даже термин “многообразие” был еще неустоявшимся. Было понимание того, что многообразие должно быть компактным (будущее теории Морса на некомпактных многообразиях было впереди), но первым естественным примером такого многообразия было не замкнутое подмногообразие \mathbb{R}^n , такое как тор в трехмерном пространстве, а область заданная одним неравенством – диск с дырками на плоскости, например (см. [12]) . Случай компактного многообразия с краем рассматривался

Морсом с самого начала, параллельно с задачей о геодезических (бесконечномерной теорией Морса). Вывод неравенств Морса для многообразия с краем произошел в 1923-1934 годах (см. [12], [13] и [14], сначала он рассматривал случай, когда функция растет при подходе к границе области в пространстве). Несомненно, это было героическое время – алгебраическая топология еще не была инструментом, например, Морс не пользуется точной гомологической последовательностью пары, клеточных пространств еще не было, анализ и функциональный анализ тоже отставали.

0.2. Строгие функции Морса, разложение многочлена Морса. Мы будем рассматривать так называемые строгие функции Морса. Напомним, что функция F , определенная на компактном многообразии M с краем ∂M , называется функцией Морса, если

1. все ее критические точки невырождены и содержатся во внутренней части многообразия M ;
2. ограничение $F|_{\partial M}$ является функцией Морса на замкнутом многообразии ∂M .

Обозначим через $\text{Crit}(F)$ множество критических точек функции F . Морсовская функция F называется *строгой функцией Морса*, если для любых разных точек $x, y \in \text{Crit}(F) \cup \text{Crit}(F|_{\partial M})$ верно: $F(x) \neq F(y)$ (все критические значения – самой функции и ее ограничения на край – различны). Строгие функции Морса образуют открытое плотное множество в пространстве всех гладких функций на компактном многообразии. Росток строгой функции Морса вдоль края мы называем *строгоморсовским ростком*.

Пусть F строгая функция Морса на M , и пусть \mathbb{E} поле коэффициентов. Наши результаты зависят от \mathbb{E} как от параметра. Один из главных результатов статьи состоит в построении некоторой примечательной комбинаторной структуры на (конечном, градуированном индексом Морса) множестве $\text{Crit}(F)$. Эта комбинаторная структура не единственна, зависит еще от некоторых данных, она будет описана в статье. Часть этой комбинаторной структуры состоит из разложения конечного множества $\text{Crit}(F)$ в дизъюнктивное объединение двух подмножеств. Первое из них мы назовем *топологически существенным подмножеством* и обозначим $\text{Tor}_{\mathbb{E}}(F)$. Мы назовем второе подмножество *дополнительным подмножеством* и обозначим его $\text{Add}_{\mathbb{E}}(F)$. В соответствии с этим многочлен Морса

$P(F)$ функции F раскладывается в сумму двух многочленов

$$P(F)(t) = \sum_{x \in \text{Crit}(F)} t^{\text{ind } x} = \sum_{x \in \text{Top}_{\mathbb{E}}(F)} t^{\text{ind } x} + \sum_{x \in \text{Add}_{\mathbb{E}}(F)} t^{\text{ind } x},$$

где ind обозначает индекс Морса критической точки и первое равенство есть определение многочлена Морса функции F . Мы обозначим первую сумму правой части этого равенства через $P_{\mathbb{E}}(F)(t)$. Мы покажем при построении, что множество $\text{Add}_{\mathbb{E}}(F)$ канонически разложено в непересекающиеся пары (двуэлементные подмножества) критических точек соседних индексов. Поэтому вторая сумма из правой стороны равенства есть $(1+t)K_{\mathbb{E}}(F)(t)$ для некоторого многочлена $K_{\mathbb{E}}(F)$ с неотрицательными целыми коэффициентами.

0.3. Обобщенные неравенства Морса. Пусть f строгоморсовский росток вдоль границы ∂M многообразия M . Мы построим конечное множество $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ многочленов с неотрицательными целыми коэффициентами, зависящими от функции f , пары $(M, \partial M)$ и \mathbb{E} (и некоторых рассуждений). Окажется, что $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ содержит все многочлены $P_{\mathbb{E}}(F)(t)$, построенные по строгоморсовским продолжениям ростка f . Таким образом, автоматически справедливы следующие теоремы:

Теорема 0.1 (Обобщенные неравенства Морса) Пусть f строгоморсовский росток вдоль края ∂M компактного многообразия M . Каждая строгая функция Морса $F: M \rightarrow \mathbb{R}$, продолжающая f , определяет многочлен $P_{\mathbb{E}}(F) \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ и многочлен $K_{\mathbb{E}}(F)$ с неотрицательными целыми коэффициентами так, что

$$P(F)(t) = P_{\mathbb{E}}(F)(t) + (1+t)K_{\mathbb{E}}(F)(t).$$

Множество $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ явно строится (см. 6.7, 6.1, 6.2 и 6.3) из данных топологического типа п. 0.7 ниже.

Следующее следствие из теоремы 0.1 дает оценку на число критических точек продолжения ростка функции вдоль границы компактного многообразия, то есть дает возможный ответ на вопрос Арнольда.

Теорема 0.2 (Обобщенные слабые неравенства Морса) Пусть f строгоморсовский росток и F функция Морса, продолжающая f . Тогда,
(1) число критических точек функции F не меньше $\min_{P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)} P(1)$;

(2) число критических точек F имеющих индекс i не меньше минимального коэффициента при t^i среди всех коэффициентов при t^i многочленов из $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$.

0.4. Связь с классическими неравенствами Морса. Мы кратко напомним знаменитые неравенства Морса для многообразия с краем [14]. Рассмотрим росток f функции вдоль края многообразия M . Мы скажем, что критическая точка функции $f|_{\partial M}$ внешняя (соответственно внутренняя), если производная функции f по направлению внешней нормали к многообразию в этой точке положительна (соответственно, отрицательна). Для функции F на M внешние (соответственно внутренние) критические точки $F|_{\partial M}$ определяются как внешние или внутренние критические точки ее ростка вдоль ∂M . Обозначим число критических точек функции F , имеющих индекс i через $m_i(F)$ и число внутренних критических точек функции $F|_{\partial M}$ через $m_i^{\partial}(F, M)$.

Для любого поля \mathbb{E} и функции Морса F числа $M_i = m_i(F) + m_i^{\partial}(F, M)$ и числа $b_i^{\mathbb{E}}(M) = \dim H_i(M; \mathbb{E})$ удовлетворяют неравенствам Морса [14] для $(n + 1)$ -мерного многообразия с краем

$$M_k - M_{k-1} + \dots + (-1)^k M_0 \geq b_k^{\mathbb{E}}(M) - b_{k-1}^{\mathbb{E}}(M) + \dots + (-1)^k b_0^{\mathbb{E}}(M) \quad (0.1)$$

где $k \in \{0, \dots, n - 1\}$, и равенству

$$M_{n+1} - M_n + \dots + (-1)^{n+1} M_0 = b_{n+1}^{\mathbb{E}}(M) - b_n^{\mathbb{E}}(M) + \dots + (-1)^{n+1} b_0^{\mathbb{E}}(M).$$

Известно, что эта система неравенств эквивалентна следующему утверждению, подобному утверждению теоремы 0.1. А именно, существует многочлен $k_{\mathbb{E}}(F)$ с неотрицательными целыми коэффициентами такой, что

$$\sum M_i t^i = P_{\mathbb{E}}(M)(t) + (1 + t)k_{\mathbb{E}}(F)(t),$$

где $P_{\mathbb{E}}(M)(t) = \sum b_i^{\mathbb{E}} t^i$ это многочлен Пуанкаре многообразия M . Это равенство эквивалентно равенству

$$P(F)(t) = P_{\mathbb{E}}(M)(t) - P_{-}(F, M)(t) + (1 + t)k_{\mathbb{E}}(F)(t),$$

где $P_{-}(F, M)(t) = \sum m_i^{\partial}(F, M) t^i$. Отметим, что многочлен $P_{\mathbb{E}}(M)(t) - P_{-}(F, M)(t)$ зависит только от многообразия M и ростка f функции F вдоль ∂M , мы обозначим $P_{-}(F, M)$ через $P_{-}(f, M)$. На языке неравенств

теорема 0.1 говорит, что росток f и многообразие M определяют несколько систем неравенств “типа Морса” (правые части могут быть разными). Продолжение же ростка f до строгой функции Морса F внутри многообразия выбирает из этих систем неравенств одно. Вообще говоря, различные продолжения могут выбрать разные системы неравенств.

Мы покажем в п. 8.2 что для строгоморсовского ростка f и произвольного многочлена $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ найдется такой многочлен Q с неотрицательными целыми коэффициентами, что

$$P(t) = P_{\mathbb{E}}(M)(t) - P_{-}(f, M)(t) + (1 + t)Q(t).$$

Поэтому классические неравенства Морса есть следствия теоремы 0.1. В случае замкнутого многообразия ($\partial M = \emptyset$) мы покажем в п. 6.8 что множество $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ состоит из одного элемента, а именно многочлена Пуанкаре $P_{\mathbb{E}}(M)$ многообразия M . Следовательно, в случае замкнутого многообразия теорема 0.1 эквивалентна классическим строгим неравенствам Морса.

0.5. Простейший пример. Для некоторых классов ростков функций классические неравенства Морса дают хорошую оценку для задачи Арнольда. Но все же часто эта оценка слабее нашей или вообще не дает ничего.

Рассмотрим, например, простейшее многообразие с краем – отрезок и функцию F показанную на рис. 1. Пусть f росток функции F вдоль границы отрезка. Ясно, что любое его продолжение внутрь имеет по крайней мере две критические точки. Однако многочлен $P(f) = P_{\mathbb{E}}(M) - P_{-}(F, M)$ равен нулю. Следовательно, классические неравенства Морса оценивают число критических точек общего продолжения f до функции на отрезке нулем! Мы покажем (в п. 6.8), что множество $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ состоит из одного многочлена, $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M) = \{1 + t\}$, что гарантирует по крайней мере две критические точки по теореме 0.2.

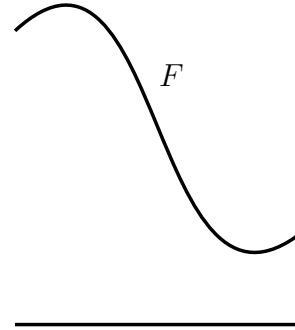


Рис. 1.

Этот пример не случайное явление, а часть общей теоремы. Если мы применим классические неравенства Морса к примеру Арнольда из 0.1, построенному по многообразию W , являющемуся произведением замкнутого многообразия на окружность, то полу-

чим (см. п. 8.4) оценку числа критических точек морсовского продолжения нулем. Такая оценка совершенно бесполезна. Оценка же из теоремы 0.1 для примера Арнольда, построенного по многообразию W , не хуже классической оценки через теорию Морса на W (см. п.8.3).

0.6. О многочленах Морса функций с заданным ростком вдоль края. Рассмотрим множество \mathcal{P}_f состоящее из всевозможных многочленов $P(F)$ Пуанкаре морсовских функций F на M , продолжающих данный строгоморсовский росток f . В окрестности любой неособой для функции F точки можно изменить функцию F и создать две критические точки соседних индексов $i, i + 1$. Таким образом, с многочленом $P(F)(t)$ множество \mathcal{P}_f содержит и многочлен $P(F)(t) + t^i + t^{i+1}$ и любой многочлен вида $P(F)(t) + k(t)(1 + t)$, где все коэффициенты многочлена k неотрицательны, а степень не больше $\dim M - 1$. Рассмотрим отображение $p_{\mathbb{E}}$ переводящее многочлены k степени не выше $\dim M - 1$ и имеющие неотрицательные целые коэффициенты в многочлен $P_{\mathbb{E}}(M)(t) - P_-(f, M)(t) + (1 + t)k_{\mathbb{E}}(F)(t)$. Такие многочлены k образуют октант $\mathbb{Z}_+^{\dim M}$. Множество $p_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathcal{P}_f)$ является в этом октанте идеалом, то есть с каждой точкой a содержит и сдвинутый октант $a + \mathbb{Z}_+^{\dim M}$. Теорема 0.1 говорит, что этот идеал $p_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathcal{P}_f)$ содержится в объединении конечного числа сдвинутых октантов с вершинами в точках множества $p_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathcal{P}_f)$. Отметим, что сам идеал $p_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathcal{P}_f)$ есть объединение конечного числа сдвинутых октантов: в \mathbb{Z}_+^n все идеалы обладают таким свойством нетеровости – каждый идеал есть объединение конечного числа сдвинутых октантов [22]. Можно построить пример, когда $p_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathcal{P}_f)$ не равен одному сдвинутому октанту.

То, что многочлены Морса даже в случае замкнутого многообразия не обязательно образуют октант, известно (см. [26]).

0.7. Топологические данные. Множество $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ зависит, как мы говорили, еще от некоторых рассуждений. Один из вариантов строится явной процедурой, зависящей от следующих данных (все гомологии с коэффициентами в \mathbb{E}):

(1) Все гомологии $H_k(M)$, $H_k(M, \partial M)$, и $H_k(\partial M)$ предполагаются известными при всех k .

(2) Критические значения, их индексы и типы (внешний или внутренний) критических точек функции $f|_{\partial M}$ предполагаются известными.

Пусть $c_1 < \dots < c_N$ есть все критические значения функции $f|_{\partial M}$. Зафиксируем числа a_1, \dots, a_{N+1} , так что $a_1 < c_1 < a_2 < \dots < a_{N+1}$.

(3) Для любой пары i, j , такой, что $1 \leq i < j \leq N + 1$, и для любого

k размерность k -х гомологий пары $(\{f|_{\partial M} \leq a_j\}, \{f|_{\partial M} \leq a_i\})$ предполагается известной.

(4) Для любого $j \in \{1, \dots, N + 1\}$ и неотрицательного k размерность подпространства

$$\iota_*(H_k(\{f|_{\partial M} \leq a_i\})) \cap \partial^* H_{k+1}(M, \partial M) \subset H_k(\partial M)$$

известна. Отображение ι_* индуцировано естественным вложением $\{f|_{\partial M} \leq a_i\} \hookrightarrow \partial M$, а ∂^* – связывающий гомоморфизм из точной последовательности пары.

Конструкция $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ не зависит от остальных частей работы.

0.8. Соображения симметрии. Соображения (нарушения) симметрии позволяют улучшить обобщенные неравенства Морса 0.3. Определим инволютивную операцию Op_{n+1} на каждом мономе t^i так: $\text{Op}_n(t^i) = t^{n+1-i}$ и продолжим ее на все многочлены по линейности. Многочлены Морса $P(F)$ и $P(-F)$ связаны очевидным соотношением $P(F) = \text{Op}_{n+1}(P(-F))$ ($\dim M = n + 1$). Множества же $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ и $\text{Op}_{n+1}(\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(-f, M))$, как мы покажем, вообще говоря не равны. Удивительно, но это простое обстоятельство иногда позволяет очень сильно улучшить неравенства Морса.

Для многочлена Q степени не больше $n + 1$ через $\text{O}_{n+1}(Q)$ обозначим множество всех многочленов вида $Q(t) + k(t)(1+t)$, где k многочлен с целыми неотрицательными коэффициентами степени не больше n . В таких обозначениях, из теоремы 0.1 вытекает, что многочлен Морса функции F лежит в

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)} \text{O}_{n+1}(Q).$$

Также он лежит и в

$$\bigcup_{P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(-f, M)} \text{O}_{n+1}(\text{Op}_{n+1}(P)).$$

Следовательно, он лежит в

$$\bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M) \\ P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(-f, M)}} \text{O}_{n+1}(Q) \cap \text{O}_{n+1}(\text{Op}_{n+1}(P)).$$

Пересечение множеств $\text{O}_{n+1}(Q)$ и $\text{O}_{n+1}(R)$ есть множество $\text{O}_{n+1}(M(Q, R))$ (если $Q(-1) = R(-1)$, иначе оно пусто) для некоторой явной операции M_n . Например, $M_4(1, t^4) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4$. Рассмотрим множество $\mathcal{Q}_{\mathbb{E}}(f, M)$, состоящее из всех многочленов вида $M(Q, \text{Op}_{n+1}(P))$

при $Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ и $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(-f, M)$. Это множество уже удовлетворяет соотношению симметрии $\mathcal{Q}_{\mathbb{E}}(f, M) = \text{Op}_{n+1}(\mathcal{Q}_{\mathbb{E}}(-f, M))$. Верна теорема:

Теорема 0.3 (Сильные обобщенные неравенства Морса)

Многочлен Морса функции Морса F , продолжающей строгоморсовский росток f вдоль края ∂M^n компактного многообразия M^n , лежит в

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathbb{E}}(f, M)} \text{O}_{n+1}(Q).$$

Отметим, что для применения этой теоремы нужно вообще говоря больше информации, чем для теоремы 0.1.

Теорема 0.3 также как и теорема 0.1 дает оценку в вопросе Арнольда:

Теорема 0.4 *Пусть f строгоморсовский росток и F функция Морса, продолжающая f . Тогда,*

- (1) *число критических точек функции F не меньше $\min_{P \in \mathcal{Q}_{\mathbb{E}}(f, M)} P(1)$;*
- (2) *число критических точек F имеющих индекс i не меньше минимального коэффициента при t^i среди всех коэффициентов при t^i многочленов из $\mathcal{Q}_{\mathbb{E}}(f, M)$.*

Эти оценки, как и неравенства теоремы 0.3, автоматически не слабее соответствующих результатов теорем 0.1 и 0.2.

0.9. Пример. Рассмотрим функцию с морсовским максимумом на $\mathbb{R}P^{2n}$. Пусть она совпадает с $-\sum a_i x_i^2$ в локальных координатах в окрестности минимума, числа a_i положительны и разные. Тогда ее можно так C^∞ -мало пошевелить, что росток f ее шевеления вдоль сферы $S(\varepsilon) = \{\sum x_i^2 = \varepsilon\}$, будет строго морсовским. Рассмотрим многообразие с краем M , полученное выбрасыванием открытого диска $D(\varepsilon) \subset \mathbb{R}P^{2n}$, такого что $S(\varepsilon)$ есть граница его замыкания. Можно показать, что при $\mathbb{E} = \mathbb{Q}$ оригинальные неравенства Морса в этой ситуации не дают ничего, множество $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}(f, M) = \{t^{2n-1} + 1\}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}(-f, M) = \{0\}$, то есть теорема 0.1 примененная к f гарантирует две критические точки у морсовского продолжения, а примененная к $-f$ ничего не гарантирует. В то же время, $\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}(f, M) = 1 + t + t^2 + \dots + t^{2n-1}$ и любое морсовское продолжение ростка f на M имеет не меньше $2n$ точек, как и должно быть (функция на $\mathbb{R}P^{2n}$ имеет не меньше $2n + 1$ критической точки).

0.10. *Достаточное условие существования критической точки у любого продолжения.* Теоремы 0.2 и 0.4 иногда гарантируют наличие хотя бы одной критической точки (возможно вырожденной) у продолжения строгоморсовского роста на краю внутрь компактного многообразия. Отметим, что на компактном связном многообразии с непустым краем существует функция Морса без критических точек.

Теорема 0.5 *Если хотя бы одно из трех чисел $\min_{P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)} P(1)$, $\min_{P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(-f, M)} P(1)$ или $\min_{P \in \mathcal{Q}_{\mathbb{E}}(f, M)} P(1)$ отлично от нуля, то у любого продолжения роста f есть хотя бы одна (возможно вырожденная) критическая точка.*

Доказательство. Действительно, если есть продолжение без критических точек, то это продолжение является строгой функцией Морса и все эти числа равны нулю. \square

0.11. *План работы.* В первой главе по многообразию с краем и функции Морса на нем строится пара клеточных комплексов – каждой критической точке ограничения на край соответствует клетка в клеточном подкомплексе; дополнительные клетки соответствуют критическим точкам и внутренним критическим точкам ограничения на край. Алгебраическая часть этой структуры (пара комплексов с упорядоченным базисом и условием верхнетреугольности) называется парой M -комплексов. Базис построенных M -комплексов определен однозначно, а дифференциал зависит от выбора клеточных аппроксимаций. Это приводит к определению эквивалентности (сопряжение дифференциала верхнетреугольным изоморфизмом нулевой градуировки, переводящим подкомплекс в себя).

Во второй главе мы формулируем первую теорему (теорему 2.3) об упрощении дифференциала, для чего нам понадобится более слабое определение эквивалентности.

В третьей главе мы начинаем доказательство этой теоремы, изучая комплексы и пары комплексов с точностью до (верхнетреугольной) эквивалентности.

В четвертой главе мы заканчиваем доказательство теоремы 2.3, расширяя эквивалентность.

В пятой главе мы еще более ослабляем эквивалентность, вводя \mathcal{P} -эквивалентность. Оказывается что пара M -комплексов \mathcal{P} -эквивалентна

единственной паре комплексов, составленной из дифференциалов 16 типов. Эти слагаемые мы называем глифами. Таким образом строгой функции Морса соответствует один класс эквивалентности, один класс слабой эквивалентности и (самый большой) класс \mathcal{P} -эквивалентности, составленный из глифов.

Глифы полезны для получения оценки в вопросе Арнольда (а также инвариантов строгой функции Морса). В оставшихся главах мы строим множество полиномов $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$, доказываем обобщенные неравенства Морса и обсуждаем их работу в примере Арнольда. Кроме этого, мы обсуждаем связь с классическими неравенствами Морса.

0.12. Предыдущие результаты. Классические (строгие) неравенства Морса были получены в работе [14]. Проблема нахождения условий на росток функции вдоль края многообразия, при которых существует продолжение вовнутрь без критических точек была рассмотрена в работах [7] и [9].

Вопрос Арнольда для замкнутого шара рассматривался Баранниковым в работе [3]. В этой замечательной работе была построена однопараметрическая теория Морса на замкнутом многообразии, кратко изложим ее идеи. Баранников переходил (выбрасывая небольшой шар около регулярной точки) от функции Морса F на $(n+1)$ -мерном шаре к функции на произведении $S^n \times I$ n -мерной сферы и отрезка. У этой функции известны граничные ростки, на обеих компонентах границы. Будем рассматривать ее как однопараметрическое семейство функций f_t на сфере S^n . Баранников сопоставляет общему значению $t \in I$ комплекс Морса (в какой-нибудь общей метрике), этот комплекс естественно оснащен информацией о том как (возрастают или убывают) движутся критические значения функции f_t и как они упорядочены.

Критические точки функции F общего положения отвечают бифуркациям такого “оснащенного комплекса Морса”, при которых одно критическое значение меняет направление движения. Баранников изучил другие возможные бифуркации (отвечающие тем значениям t , при которых функция f_t становится не строгоморсовской), и заменил вопрос Арнольда на (по сути комбинаторный) вопрос об оценке снизу на число бифуркаций первого типа в последовательности комплексов, соединяющих комплекс исходного ростка вдоль сферы и ростка функции высоты.

По-видимому, идеи этой работы можно пытаться развить, чтобы получить оценки в общем вопросе Арнольда, но это не сделано.

0.13. . Автор очень благодарен Ф. Аикарди, П.Бресслеру, А. Вайнштейну, В. Васильеву, О. Виро, В. Гинзбургу, А. Горинову, В. Горюнову, Ф. Лауденбаху, Дм. Новикову, М. Поляку, М. Прохоровой, С. Табачникову, М. Темкину, Дж. Файну, Э. Феррану, Б. Хесину, А. Хованскому, Ю. Чеканову, Б. Шантрейну, Ф. Шленку за полезные обсуждения, вопросы, замечания и помощь в работе.

1 Функции на многообразии с краем и пары комплексов.

Стандартная процедура теории Морса [10] сопоставляет CW -комплекс функции Морса на замкнутом многообразии. Начав со строгой функции Морса на многообразии M с краем ∂M мы построим пару (X, Y) CW -комплексов гомотопически эквивалентную паре $(M, \partial M)$. Эта пара (X, Y) вообще говоря не однозначно определена. Она зависит от выбора клеточных аппроксимаций использованных в конструкциях ниже. Мы изучим (на уровне клеточных дифференциалов) неоднозначность в наших конструкциях.

1.1. Перестройки множеств меньших значений. Рассмотрим строгую функцию Морса F на многообразии M с краем ∂M . Обозначим множество меньших значений $\{F \leq c\}$ через F_c , и множество $\{F|_{\partial M} \leq c\}$ через F_c^∂ . Пусть $c_1 < \dots < c_N$ критические значения функций F и $F|_{\partial M}$. Для топологического пространства X , замкнутой клетки e^k и непрерывного отображения $\varphi: \partial e^k = S^{k-1} \rightarrow X$ мы обозначим через $X \cup_\varphi e^k$ результат приклейки клетки e^k размерности k по φ к X . Напомним, что пара топологических пространств (A, B) есть строгий деформационный ре-тракт пары (A_1, B_1) , если $(A_1, B_1) \supset (A, B)$ и найдется такое семейство $f_{t, t \in [0, 1]}: A_1 \rightarrow A_1$ непрерывных отображений, что $f_0 = Id$, $f_t(B_1) \subset B_1$, $f_t|_A = Id$ для всех $t \in [0, 1]$ и $f_1(A_1) = A$, $f_1(B_1) = B$.

Топология пары (F_c, F_c^∂) меняется когда параметр c проходит сквозь критическое значение следующим образом:

Предложение 1.1 (0) *Если отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений c_1, \dots, c_N , то пара (F_a, F_a^∂) есть строгий деформационный ре-тракт пары (F_b, F_b^∂) .*

Возьмем $c \in \{c_1, \dots, c_N\}$ и достаточно малое положительное число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим пары $(F_{c-\varepsilon}, F_{c-\varepsilon}^\partial) \subset (F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial, F_{c+\varepsilon}^\partial) \subset (F_{c+\varepsilon}, F_{c+\varepsilon}^\partial)$.

(1) Пусть c – значение функции F в критической точке индекса k . Пара $(F_{c-\varepsilon}, F_{c-\varepsilon}^\partial)$ является строгим деформационным ретрактом пары $(F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial, F_{c+\varepsilon}^\partial)$. Существует приклеивающее отображение φ , определенное на границе ∂e^k замкнутой клетки e^k , и гомотопическая эквивалентность

$$h: (F_{c+\varepsilon}, F_{c+\varepsilon}^\partial) \rightarrow ((F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial) \cup_\varphi e^k, F_{c+\varepsilon}^\partial),$$

действующая тождественным образом на $F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial$.

(2) Пусть c – значение функции $F|_{\partial M}$ во внутренней критической точке индекса k . Тогда существует приклеивающее отображение φ и гомотопическая эквивалентность

$$h: (F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial, F_{c+\varepsilon}^\partial) \rightarrow (F_{c-\varepsilon} \cup_\varphi e^k, F_{c-\varepsilon} \cup_\varphi e^k),$$

действующая тождественным образом на $F_{c-\varepsilon}$. Пара $(F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial, F_{c+\varepsilon}^\partial)$ является строгим деформационным ретрактом пары $(F_{c+\varepsilon}, F_{c+\varepsilon}^\partial)$.

(3) Пусть c – значение функции $F|_{\partial M}$ во внешней критической точке индекса k . Тогда существует приклеивающее отображение φ и гомотопическая эквивалентность

$$h: (F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial, F_{c+\varepsilon}^\partial) \rightarrow (F_{c-\varepsilon} \cup_\varphi e^k, F_{c-\varepsilon} \cup_\varphi e^k),$$

действующая тождественным образом на $F_{c-\varepsilon}$. Кроме этого, существует приклеивающее отображение φ_1 и гомотопическая эквивалентность

$$h_1: (F_{c+\varepsilon}, F_{c+\varepsilon}^\partial) \rightarrow ((F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial) \cup_{\varphi_1} e^{k+1}, F_{c+\varepsilon}^\partial),$$

действующая тождественным образом на $F_{c-\varepsilon} \cup F_{c+\varepsilon}^\partial$. Пространство $F_{c-\varepsilon}$ есть строгий деформационный ретракт пространства $F_{c+\varepsilon}$. \square

Предложение 1.1 есть относительная версия стандартного [10] результата теории Морса (более сильный результат содержится в [4]). Его можно рассматривать как утверждение из стратифицированной теории Морса [2] – многообразие с краем есть один из первых примеров стратифицированного множества. Его доказательство параллельно стандартным рассуждениям и следует из относительной версии леммы Морса, утверждающей что для каждой внутренней (соответственно, внешней) критической точки функции $F|_{\partial M}$ с критическим значением c существуют локальные координаты (x, y) ($y \in \mathbb{R}_+$) с центром в критической точке

такие, что $F(x, y) = c + y + Q(x)$ (соответственно, $F(x, y) = c - y + Q(x)$) где Q есть “сумма квадратов”, и из явного описания клеток и ретракций для такого выбора координат. Мы опускаем детали.

1.2. Замечание. Можно изменить строгую функцию Морса так, что ее внешняя критическая точка станет внутренней (соответственно внутренняя точка станет внешней). При этом функция изменится C^0 -мало в заданной окрестности внешней точки, внутри многообразия появится одна дополнительная критическая точка, а ее ограничение на край не изменится. Вне окрестности внешней точки функция не изменится. Двумерный пример таких хирургий показан на рис. 2.

Классические неравенства Морса 0.4 можно доказать (фактически так и было сделано в работе [14] с учетом того, что гомотопических эквивалентностей, клеток, и клеточных комплексов еще не было) так: уничтожим все внешние критические точки хирургиями, уничтожающими все внутренние критические точки (2. II.) Тогда, согласно предложению 1.1б многообразие (не пара!) гомотопически эквивалентно клеточному комплексу в котором число клеток размерности i равно числу критических точек индекса i и числа внутренних точек индекса i (см. [8] о том как это объяснял Том, показывая на пальцах, что “половина” критических точек ограничения на край не нужна). Классические неравенства Морса п. 0.4 есть неравенства связывающие размерности пространств алгебраического комплекса M_i и размерности его гомологий b_i . А именно, комплекс (над \mathbb{E}) с размерностями пространств комплекса M_i и размерностями гомологий b_i существует если и только если неотрицательные целые числа M_i, b_i удовлетворяют строгим неравенствам Морса. Это заканчивает доказательство классических неравенств Морса.

Первая и вторая хирургия тесно связаны – одна получается из другой сопряжением с операцией умножения функции на -1 . Мы в работе будем пользоваться первой, а не второй хирургией, не упоминая это явно.

1.3. Морсовские цепи. Мы продолжаем с обозначениями, введенными в п. 1.1. Функция F достигает свои максимальные и минимальные значения в точках из множества $\text{Crit}(F) \cup \text{Crit}(F|_{\partial M})$. Следовательно, множество значений функции F содержится в отрезке $[c_1, c_N]$. Фиксируем числа a_0, \dots, a_N так, что $a_0 < c_1 < a_1 < \dots < a_{N-1} < c_N < a_N$. Рассмотрим

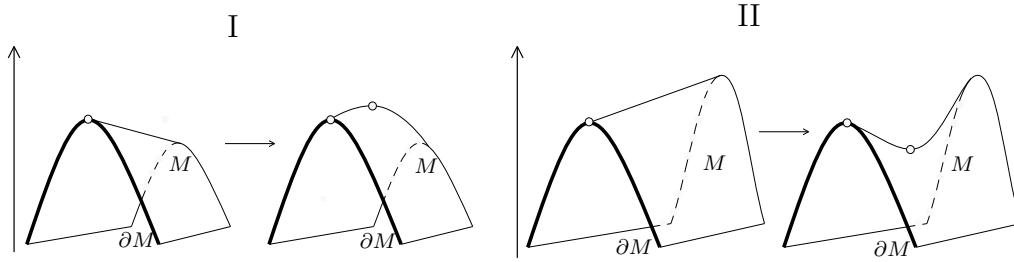


Рис. 2. Хирургия строгих функций Морса.

цепь включений топологических пространств:

$$\begin{aligned}
 (\emptyset, \emptyset) &= (F_{a_0}, F_{a_0}^\partial) \subset (F_{a_0} \cup F_{a_1}^\partial, F_{a_1}^\partial) \subset (F_{a_1}, F_{a_1}^\partial) \subset \dots \\
 &\dots \subset (F_{a_{N-1}}, F_{a_{N-1}}^\partial) \subset (F_{a_{N-1}} \cup F_{a_N}^\partial, F_{a_N}^\partial) \subset (F_{a_N}, F_{a_N}^\partial) = (M, \partial M).
 \end{aligned}$$

Обозначим $2N+1$ пару из этой цепи вложений через $(U_0, V_0) \subset (U_1, V_1) \subset \dots \subset (U_{2N}, V_{2N})$.

Согласно предложению 1.1, или U_{i+1} гомотопически эквивалентно U_i или же U_{i+1} гомотопически эквивалентно U_i с одной приклеенной клеткой. Применяя стандартную технику (см. [10]) можно построить цепочку включений пар CW -комплексов

$$(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \subset (\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1) \subset \dots \subset (\tilde{X}_{2N}, \tilde{Y}_{2N})$$

и гомотопические эквивалентности $\tilde{h}_i: (U_i, V_i) \rightarrow (\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i)$ для $i \in \{0, \dots, 2N\}$ так что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 (U_0, V_0) & \subset & (U_1, V_1) & \subset & \dots & \subset & (U_{2N}, V_{2N}) \\
 \tilde{h}_0 \downarrow & & \tilde{h}_1 \downarrow & & \dots & & \tilde{h}_{2N} \downarrow \\
 (\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) & \subset & (\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1) & \subset & \dots & \subset & (\tilde{X}_{2N}, \tilde{Y}_{2N})
 \end{array}$$

коммутативна и удовлетворяет следующему условию: при $i \in \{0, \dots, 2N-1\}$, $\tilde{Y}_i = \tilde{Y}_{2N} \cap \tilde{X}_i$ и \tilde{X}_{i+1} или равно \tilde{X}_i или есть результат приклейки ровно одной клетки к \tilde{X}_i . Отметим, что при построении клеточных комплексов приходится выбирать клеточные аппроксимации отображений, это может быть сделано разными способами.

Напомним топологические понятия. Пусть

$$(A_0, B_0) \subset (A_1, B_1) \subset \dots \subset (A_K, B_K) = (A, B)$$

и

$$(C_0, D_0) \subset (C_1, D_1) \subset \dots \subset (C_K, D_K) = (C, D)$$

фильтрованные пары топологических пространств. Фильтрованное (непрерывное) отображение это отображение пар $h: (A, B) \rightarrow (C, D)$ такое что $h(A_i) \subset C_i$, $h(B_i) \subset D_i$ при всех $i \in \{0, \dots, K\}$. Фильтрованная гомотопия между фильтрованными отображениями $h_j: (A, B) \rightarrow (C, D)$, $j \in \{0, 1\}$ есть фильтрованное отображение $H: (A \times I, B \times I) \rightarrow (C, D)$ такое что $H|_{A \times \{j\}} = h_j$, $j \in \{0, 1\}$. Два фильтрованных отображения $h_j: (A, B) \rightarrow (C, D)$, $j \in \{0, 1\}$ называются *фильтрованно гомотопными* если между ними найдется фильтрованная гомотопия. Фильтрованное отображение $h: (A, B) \rightarrow (C, D)$ есть *фильтрованная гомотопическая эквивалентность* если найдется такое фильтрованное отображение $g: (C, D) \rightarrow (A, B)$, что отображения $h \circ g$ и $g \circ h$ фильтрованно гомотопны Id_A, Id_C соответственно. Легко выводится из [10], стр. 20–23, что отображение \tilde{h}_{2N} выше есть фильтрованная гомотопическая эквивалентность.

Скажем, что *морсовская цепь \mathbf{M} строгой функции Морса F* есть следующая тройка:

1. CW -пара (X, Y) ;
2. CW -фильтрация $(\emptyset, \emptyset) = (X_0, Y_0) \subset \dots \subset (X_{2N}, Y_{2N}) = (X, Y)$, такая что для каждого $i \in \{0, \dots, 2N - 1\}$, $Y_i = Y_{2N} \cap X_i$ и X_i или равно X_{i-1} или есть результат приклейки одной клетки к X_i ;
3. фильтрованная гомотопическая эквивалентность $h: (M, \partial M) \rightarrow (X, Y)$.

Мы полагаем, что ориентация клеток в морсовской цепи фиксирована.

В общем случае (см. 1.5), комплексы X_i, Y_i из морсовской цепи неоднозначно определены. Однако, для любого $i \in \{0, \dots, 2N\}$ число клеток данной размерности в X_i, Y_i определено только функцией F . Из предложения 1.1 следует, что общее число клеток в комплексе Y_{2N} равно числу критических точек функции $F|_{\partial M}$. Число клеток в $X_{2N} \setminus Y_{2N}$ равно числу внешних критических точек функции $F|_{\partial M}$ плюс число критических точек функции F .

1.4. Замечание. Из функции Морса и общей римановой метрики на замкнутом многообразии можно ввести структуру клеточного комплекса

на самом замкнутом многообразии, а не на гомотопически эквивалентном пространстве (см. [17]). Подобную конструкцию можно провести и на многообразии с краем, но мы не используем это в работе.

Дифференциал можно было построить из траекторий антиградиентного поля (предварительно надо изменить метрику и функцию) – это сделано в [19].

1.5. Пример. Рассмотрим кольцо являющееся дополнением в сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ к двум дискам как показано на рис. 3.I. Пусть F функция высоты на кольце. Она имеет ровно одну критическую точку, имеющую индекс 2 с критическим значением c_7 ; c_1, c_2, c_3, c_5, c_6 – критические значения $F|_{\partial M}$ во внутренних критических точках, c_4 есть критическое значение во внешней критической точке. На рис. 3.II, рис. 3.III мы показываем клетки двух морсовских цепей, соответствующих функции F (есть и другие морсовские цепи, соответствующие этой функции).

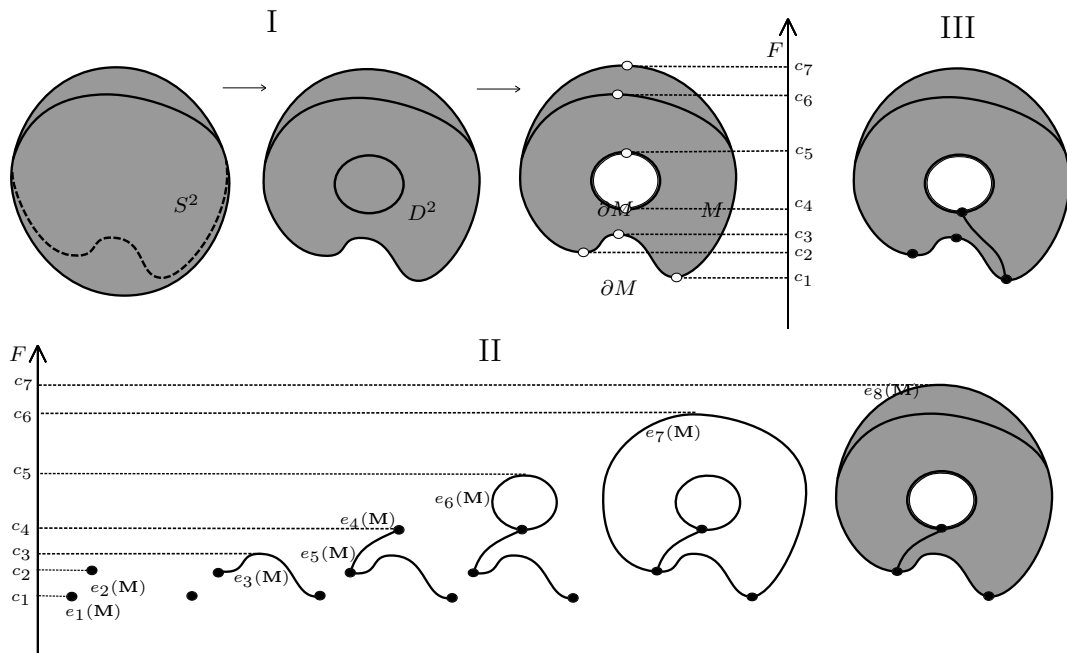


Рис. 3. Функция высоты на кольце.

1.6. Верхнетреугольность. Рассмотрим морсовскую цепь M строгой функции Морса F . Мы занумеруем клетки цепи M через $e_1(M), \dots, e_T(M)$

в порядке их появления в подкомплексах X_i — приклеенная позже клетка имеет больший номер, чем клетка приклеенная раньше.

Возьмем две морсовских цепи \mathbf{M} , \mathbf{M}' одной строгой функции Морса F . Цепь \mathbf{M} состоит из пар $\{(X_i, Y_i)\}$ и фильтрованной гомотопической эквивалентности h . Мы будем обозначать соответствующие объекты цепи \mathbf{M}' со штрихами. Рассмотрим фильтрованное гомотопически обратное отображение $g: (X_{2N}, Y_{2N}) \rightarrow (U_{2N}, V_{2N})$ к фильтрованному отображению h . Положим $S = h' \circ g$. Отображение S индуцирует клеточную гомотопическую эквивалентность $S_i: X_i \rightarrow X'_i$ для $i \in \{1, \dots, 2N\}$. Обозначим через $S_i^\#$ индуцированное отображение комплексов клеточных цепей. Отображение $S_{2N}^\#$ есть изоморфизм комплексов, более того справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.2 *Матрица оператора $S_{2N}^\#$ в базисах $(e_1(\mathbf{M}), \dots, e_L(\mathbf{M}))$ и $(e_1(\mathbf{M}'), \dots, e_L(\mathbf{M}'))$ является верхнетреугольной с ± 1 на диагонали.*

Доказательство. Рассмотрим клетку $e_k(\mathbf{M})$. Рассмотрим минимальное $i = i(k)$ такое что $e_k(\mathbf{M}) \in X_i$. По определению X_i состоит из k клеток $e_1(\mathbf{M}), \dots, e_k(\mathbf{M})$. Отображение S фильтровано, следовательно $S_{2N}^\#(e_k(\mathbf{M})) = S_i^\#(e_k(\mathbf{M}))$. Число клеток в X'_i равно числу клеток в X_i . Поэтому $S_i^\#(e_k(\mathbf{M}))$ есть линейная комбинация клеток $e_1(\mathbf{M}'), \dots, e_k(\mathbf{M}')$. Это доказывает, что матрица $S_{2N}^\#$ верхнетреугольна.

Диагональный элемент $(S_{2N}^\#)_{k,k}$ есть степень отображения

$$S^{\dim e_k(\mathbf{M})} = X_{i(k)}/X_{i(k)-1} \rightarrow X'_{i(k)}/X'_{i(k)-1} = S^{\dim e_k(\mathbf{M}')}$$

индуцированного из $S_{i(k)}$. Поскольку $S_{i(k)}$ является гомотопической эквивалентностью, эта степень равна ± 1 . \square

Эти рассуждения мотивируют следующие определения.

1.7. Определение M -комплексов и их изоморфизмов. M -комплекс это следующая структура:

1. Конечный комплекс конечномерных векторных пространств над полем \mathbb{E} :

$$0 \longrightarrow C_K \xrightarrow{\partial_K} C_{K-1} \xrightarrow{\partial_{K-1}} \dots \xrightarrow{\partial_{L+1}} C_L \xrightarrow{\partial_L} C_{L-1} \longrightarrow 0$$

(то есть $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ при всех i). Мы обозначим прямую сумму $\oplus_i \partial_i$ через ∂ .

2. В каждом пространстве C_i выбран базис.
3. Выбран линейный порядок на объединении A всех базисов, так что выполнено условие “понижения порядка”: для любого $a \in A$ вектор $\partial(a)$ есть или линейная комбинация элементов A порядка меньше, чем a или ноль.

Нам также понадобится другое эквивалентное определение M -комплекса. Пусть A есть конечное линейно упорядоченное множество $\{a_1, \dots, a_N\}$, $a_1 < \dots < a_N$. Градуировка на A это отображение $A \rightarrow \mathbb{Z}$, мы обозначим его через \deg . Число $\deg(a)$ называется *степенью* элемента $a \in A$. Векторное пространство $\mathbb{E}(A) = \mathbb{E} \otimes A$ естественно градуировано. M -дифференциал (M_A -дифференциал, если нам нужно быть более точными) это дифференциал ∂ на $\mathcal{F}(A)$ степени -1 , такой что

$$\partial(\mathbb{E} \otimes \{a_1, \dots, a_i\}) \subset \mathbb{E} \otimes \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$$

при всех $i \in \{1, \dots, N\}$. M -комплекс это градуированное векторное пространство $\mathbb{E}(A)$ с M -дифференциалом ∂ . Мы обозначим его через $\mathcal{M}_{A,\partial}$. M -дифференциал ∂ будем также обозначать ∂_A . M -комплексы, наделенные дополнительной структурой, рассматривались в [3] под именем оснащенных комплексов Морса.

Будем говорить, что M -комплексы $\mathcal{M}_{A_1,\partial_1}$ и $\mathcal{M}_{A_2,\partial_2}$ равны, если множества A_1 и A_2 градуированно упорядочено изоморфны и матрицы дифференциалов ∂_1 и ∂_2 в базисах A_1 и A_2 совпадают. Через $\text{Aut}_T(A)$ мы обозначим группу всех градуированных изоморфизмов пространства $\mathbb{E}(A) = \mathbb{E} \otimes A$, сохраняющих каждое подпространство $\mathbb{E} \otimes \{a_1, \dots, a_i\}$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Матрицы операторов из группы $\text{Aut}_T(A)$ в базисе A верхнетреугольны. Скажем, что M_A -дифференциалы $\partial_1, \partial_2: \mathbb{E}(A) \rightarrow \mathbb{E}(A)$ эквивалентны (или A -эквивалентны), если найдется $g \in \text{Aut}_T(A)$, такой что $\partial_2 = g\partial_1g^{-1}$. Скажем что два M -комплекса *изоморфны*, если они становятся равными после замены одного из M -дифференциалов на эквивалентный.

Отметим, что согласно предложению 1.2 естественно рассматривать меньшую группу автоморфизмов, верхнетреугольных с ± 1 на диагонали. Это несомненно приводит к новым инвариантам функций Морса и в случае замкнутого многообразия сделано в работе [21].

1.8. Пары M -комплексов. Пусть $\mathcal{M}_{A,\partial}$ M -комплекс. Для подмножества B множества A такого что $\partial(\mathbb{E} \otimes B) \subset \mathbb{E} \otimes B = \mathbb{E}(B)$, $\mathcal{M}_{B,\partial|_{\mathbb{E}(B)}}$ является

M -комплексом (порядок и градуировка на B индуцированы из порядка и градуировки на A). Будем говорить, что $\mathcal{M}_{B, \partial|_{\mathbb{E}(B)}}$ есть M -подкомплекс M -комплекса $\mathcal{M}_{A, \partial}$ и будем обозначать $\partial|_{\mathbb{E}(B)}$ через ∂_B . Пару, состоящую из M -комплекса и его M -подкомплекса, будем называть парой M -комплексов или M -парой. Дифференциал ∂ в этом случае будет называться $M_{A, B}$ -дифференциалом. Обозначим M -пару $(\mathcal{M}_{A, \partial}, \mathcal{M}_{B, \partial_B})$ через $\mathcal{M}_{A, B, \partial}$.

Рассмотрим подгруппу $\text{Aut}_T(A, B)$ группы $\text{Aut}_T(A)$, состоящую из всех элементов $g \in \text{Aut}_T(A)$ таких что $g(\mathbb{E}(B)) = \mathbb{E}(B)$. Два $M_{A, B}$ -дифференциала ∂_1 и ∂_2 назовем (A, B) -эквивалентными (или эквивалентными), если $\partial_2 = g\partial_1 g^{-1}$ при подходящем $g \in \text{Aut}_T(A, B)$. Две M -пары $\mathcal{M}_{A_1, B_1, \partial_1}$ и $\mathcal{M}_{A_2, B_2, \partial_2}$ назовем *изоморфными*, если они становятся равными после замены одного из ∂_1 на (A_1, B_1) -эквивалентный.

1.9. Алгебраическая модель строгой функции Морса. Пусть F строгая функция Морса на компактном многообразии с краем, \mathbf{M} ее морсовская цепь. Зафиксируем ориентации клеток цепи \mathbf{M} . Клеточная граница клетки $e_k(\mathbf{M})$ или равна нулю или линейной комбинации клеток с меньшими номерами. Следовательно морсовская цепь естественно порождает пару M -комплексов $\mathcal{M}_{A_F, B_F, \partial}$ с M -дифференциалом $\partial = \partial(\mathbf{M})$. Множество B_F может быть отождествлено с критическими точками функции $F|_{\partial M}$ градуированными индексом Морса ind_M и упорядоченными в соответствии с критическими значениями. Множество A_F есть результат следующих операций. Сначала мы добавим к B_F множество критических точек функции F градуированное ind_M . Получившееся множество естественно упорядочено в соответствии с критическими значениями и градуировано индексом Морса. Обозначим получившееся множество через A_F^1 . Обозначим через $C_F \subset B_F$ подмножество, состоящее из всех внешних критических точек функции $F|_{\partial M}$. Для каждого $b \in C_F$ мы добавляем к A_F^1 элемент b_+ следующий за b степень которого равна $\text{ind}_M F|_{\partial M}(b) + 1$. Получившееся множество есть A_F .

Следующее утверждение собирает предыдущие наблюдения.

Утверждение 1.3 *Строгая функция Морса F естественно соответствует паре M -комплексов $\mathcal{M}_{A_F, B_F, \partial}$, определенной с точностью до изоморфизма. \square*

Пару M -комплексов $\mathcal{M}_{A_F, B_F, \partial}$ изоморфную M -паре построенной с помощью теории Морса из строгой функции Морса F будем называть

алгебраической моделью функции F . Граница любой одномерной клетки состоит из не более чем двух нульмерных клеток. Уже поэтому, даже если мы рассмотрим целые коэффициенты и целочисленные изоморфизмы, то не любая алгебраическая модель соответствует морсовской цепи из 1.3.

1.10. Гранично гомологически существенные критические значения. Рассмотрим функцию h на границе ∂M многообразия M . Множество критических значений функции h содержит подмножество естественно выделенное следующей конструкцией.

Обозначим через $h_c, c \in \mathbb{R}$ множество меньших значений $\{h \leq c\}$. Рассмотрим подпространство $\iota_*(H_*(h_c; \mathbb{E}))$ пространства $H_*(\partial M; \mathbb{E})$ (ι_* индуцировано включением). Обозначим через I_c пересечение этого подпространства с подпространством $\partial^* H_*(M, \partial M; \mathbb{E}) \subset H_*(\partial M; \mathbb{E})$, где ∂^* оператор из длинной точной последовательности пары $(M, \partial M)$. Размерность $\dim I_c$ есть монотонно неубывающая функция параметра c с целыми значениями. В соответствии с теорией Морса размерность I_c скачет только в критических значениях функции h . Мы скажем что критическое значение функции h – *гранично гомологически существенное критическое значение*, если это точка разрыва функции $\dim I_c$. Можно сказать, что граничные гомологически существенные значения показывают как именно многообразие подклеено к краю. Граничные гомологически существенные критические значения функции F на M это граничные гомологически существенные критические значения функции $F|_{\partial M}$ по определению.

Граничные гомологически существенные критические точки (которые мы, допуская вольность речи, отождествляем в этом случае строгой функции Морса со значениями) функции высоты отмечены черными кружками на рис 4.

1.11. Изображение пары M -комплексов. M -пару $\mathcal{M}_{A,B,\partial}$ мы изображаем следующим образом. Элементы множества A мы изображаем кружками, помещая эти кружки вдоль вертикальной оси в соответствии с порядком на A : кружок, соответствующий элементу a_i , выше кружка, соответствующего элементу a_j если $i > j$. Кружки, соответствующие элементам множества B , мы рисуем слева от вертикальной оси, обозначающей ось значений функции. Кружки, соответствующие элементам множества $A \setminus B$ мы рисуем справа от вертикальной оси.

Если $\partial a_i = \sum_{k \in I} \lambda_k a_k$, $\lambda_k \neq 0$, то мы соединяем кружки, соответству-

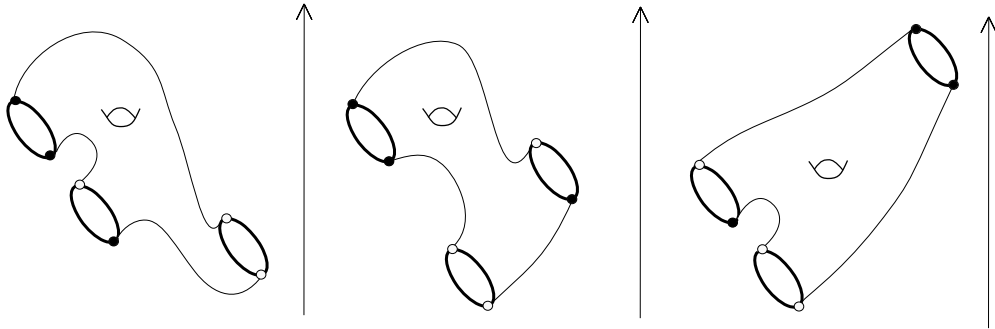


Рис. 4. Граничные гомологически существенные критические значения.

ющие элементам a_i и $a_k, k \in I$ отрезками, помечая их числами λ_k если $\lambda_k \neq 1$. Например M -пара $\mathcal{M}_{A,B,\partial}$, где $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a_1, a_3\}$, и дифференциал ∂ определен на элементах базиса: $\partial a_4 = a_3 + a_2$, $\partial a_3 = a_1$, $\partial a_2 = -a_1$, $\partial a_1 = 0$ показана на рис. 5.I.

Для алгебраической модели функции F мы рисуем кружки, соответствующие граничным гомологически существенным критическим значениям функции $F|_{\partial M}$, черным цветом. Ниже мы покажем, что каждая внешняя критическая точка $b \in C_F$ появляется с ненулевым коэффициентом в $\partial(b_+)$. Мы будем соединять b с b_+ двойным отрезком вместо одного. Имеет смысл считать, что наклон этого отрезка положителен и “бесконечно мал”. В самом деле, при соответствующей хирургии рис. 2. I. возникает критическая точка с критическим значением чуть больше значения во внешней точке.

На рис. 5.II показан график функции на отрезке и его алгебраическая модель с \mathbb{Z}_2 -коэффициентами. На рис. 5.III изображена M -пара с \mathbb{Z}_2 -коэффициентами, соответствующая морсовской цепи из рис. 3.II.

2 ПАРЫ M -КОМПЛЕКСОВ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ.

Произвольная M -пара, рассматриваемая с точностью до эквивалентности, есть непростой объект для работы. Мы разбиваем множество всех M -пар на части, так что каждая часть содержит единственную относительно простую M -пару, кодирующую эту часть.

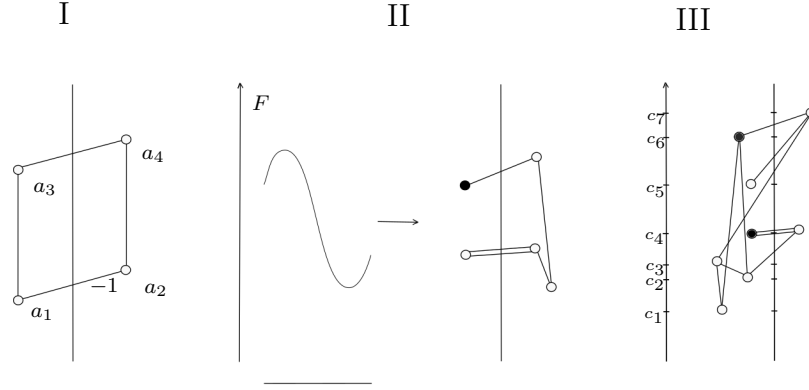


Рис. 5. Примеры M -пар.

2.1. ∂ -тривиальные элементы. Рассмотрим M -пару $\mathcal{M}_{A,B,\partial}$, $A = \{a_1 \prec \dots \prec a_N\}$. Мы назовем элемент $a_k \in B$ ∂ -тривиальным, если $k < N$, $a_{k+1} \in A \setminus B$ и a_k входит в разложение $\partial(a_{k+1})$ по элементам базиса A с ненулевым коэффициентом.

Лемма 2.1 Пусть дифференциалы ∂ и ∂' (A, B) -эквивалентны. Тогда множество всех ∂ -тривиальных элементов совпадает с множеством всех ∂' -тривиальных элементов.

Доказательство. Пусть $\partial' = g\partial g^{-1}$ для некоторого $g \in \text{Aut}_T(A, B)$. Мы обозначаем многоточием линейную комбинацию элементов с индексами меньше k . Имеем: $g^{-1}(a_{k+1}) = \lambda_1 a_{k+1} + \dots$, $g(a_k) = \lambda_2 a_k + \dots$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Тогда $\partial(a_{k+1}) = \mu a_k + \dots$ с $\mu \neq 0$ влечет $\partial'(a_{k+1}) = \lambda_2 \mu \lambda_1 a_k + \dots$ \square

2.2. Множество $\mathcal{D}_{A,B,C}$. Мы фиксируем тройку $A \supset B \supset C$ конечных множеств и предполагаем, что A непусто. Множество A градуировано и линейно упорядочено. Обозначим через $\mathcal{D}_{A,B,C}$ множество всех (A, B) -дифференциалов, таких что каждый элемент множества C ∂ -тривиален для всех $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$. Для каждого (необходимо являющегося ∂ -тривиальным) элемента $a \in C$ мы изображаем в соответствующем рисунке M -пары двойной отрезок, соединяющий a со следующим элементом в A .

Напомним, что для строгой функции Морса F мы построили (см 1.9) тройку градуированных множеств $A_F \supset B_F \supset C_F$ (C_F состоит из всех внешних критических точек).

Утверждение 2.2 *Дифференциал алгебраической модели строгой функции Морса F принадлежит $\mathcal{D}_{A_F, B_F, C_F}$.*

Доказательство. Рассмотрим алгебраическую модель $\mathcal{M}_{A_F, B_F, \partial}$ функции F . Нужно показать, что каждый элемент $a_k \in C_F$ является ∂ -тривиальным. По построению $a_{k+1} \in A_F \setminus B_F$. Элементы a_k, a_{k+1} образующие комплекса вычисляющего относительные гомологии пары $(F_{c+\varepsilon}, F_{c-\varepsilon})$, где $c = F(a_k)$. Поскольку $F_{c-\varepsilon}$ есть строгий деформационный ретракт $F_{c+\varepsilon}$ по предложению 1.1(3), то эти гомологии тривиальны и следовательно a_k ∂ -тривиален. \square

Пространство $\mathcal{D}_{A, B, C}$ есть один из основных объектов работы. Очевидно это объединение классов эквивалентности. Число этих классов очевидно конечно для конечного поля, для $\mathbb{E} = \mathbb{Q}$ это вообще говоря не так.

2.3. Фактор M -комплекс. Рассмотрим M -пару $\mathcal{M}_{A, B, \partial}$. Мы будем отождествлять множество $A \setminus B$ с базисом факторкомплекса $\mathcal{M}_{A, \partial} / \mathcal{M}_{B, \partial}$. Линейный порядок и градуировка на A индуцируют естественным образом линейный порядок и градуировку на $A \setminus B$. Ясно, что индуцированный дифференциал на $\mathcal{M}_{A, \partial} / \mathcal{M}_{B, \partial}$ является M -дифференциалом в соответствии с этими линейным порядком и градуировкой на $A \setminus B$. Мы обозначим этот индуцированный дифференциал через $\partial_{A \setminus B}$, а сам факторкомплекс будем обозначать $\mathcal{M}_{A \setminus B, \partial_{A \setminus B}}$.

2.4. Слабая эквивалентность. Скажем, что дифференциалы $\partial_1, \partial_2 \in \mathcal{D}_{A, B, C}$ слабо эквивалентны если существует автоморфизм $g \in \text{Aut}(A, B)$ (g не обязательно верхнетреугольный оператор), такой что $g\partial_1 = \partial_2g$ и естественно индуцированный автоморфизм $g_{A \setminus B}$ принадлежит $\text{Aut}_T(A \setminus B)$ и ограничение $g|_{\mathbb{E} \otimes B}$ принадлежит $\text{Aut}_T(B)$.

Мы покажем, что $\mathcal{D}_{A, B, C}$ есть объединение конечного числа классов слабой эквивалентности. В каждом классе слабой эквивалентности мы построим уникальный удобный представитель (сечение слабой эквивалентности). Для реализации этой программы нам понадобятся следующие определения и конструкции.

2.5. Разложение в прямую сумму. Скажем, что M -пара $\mathcal{M}_{A, B, \partial}$ разложима в прямую сумму двух M -пар (или, эквивалентно, дифференциал ∂ разложим в прямую сумму), если существует разложение $A = A_1 \cup A_2$ в объединение двух непересекающихся подмножеств, так что подпространства $\mathbb{E}(A_1)$ и $\mathbb{E}(A_2)$ являются ∂ -инвариантными.

В этом случае пространства $\mathbb{E}(A_i \cap B)$ также ∂ -инвариантны, так что корректно определены M -пары $\mathcal{M}_{A_1, B_1, \partial_1}$ и $\mathcal{M}_{A_2, B_2, \partial_2}$, где $B_i = A_i \cap B$, $i \in \{1, 2\}$ и ∂_i это ограничения ∂ . Мы будем писать $\mathcal{M}_{A, B, \partial} = \mathcal{M}_{A_1, B_1, \partial_1} \oplus \mathcal{M}_{A_2, B_2, \partial_2}$ в этом случае. Если $\mathcal{M}_{A, B, \partial} = \mathcal{M}_{A_1, B_1, \partial_1} \oplus \mathcal{M}_{A_2, B_2, \partial_2}$ и C это множество ∂ -тривиальных элементов то множество $C_i = B_i \cap C$ ($i \in \{1, 2\}$) состоит из ∂_i -тривиальных элементов и мы будем писать $\mathcal{M}_{A, B, C, \partial} = \mathcal{M}_{A_1, B_1, C_1, \partial_1} \oplus \mathcal{M}_{A_2, B_2, C_2, \partial_2}$ (или $\partial = \partial_1 \oplus \partial_2$) в этом случае. Разложение в прямую сумму большего числа слагаемых определяется аналогично. Разложение M -пары в прямую сумму неразложимых слагаемых единственно с точностью до перестановки слагаемых.

2.6. Операция #. Построим следующую частично определенную операцию на M -парах. Рассмотрим ненулевые M -пары $\mathcal{M}_{A, B, C, \partial}$ и $\mathcal{M}_{X, Y, Z, \delta}$, такие что $A \cap X = \emptyset$. Пусть $A = \{a_1 \prec \dots \prec a_K\}$, $X = \{x_1 \prec \dots \prec x_L\}$. Пусть степень элемента x_L больше на единицу степени элемента a_1 и $a_1 \in B$, $a_1 \notin C$, $x_L \in X \setminus Y$, $x_{L-1} \notin Z$. Обозначим через $A \# X$ множество $A \cup X$ с порядком

$$x_1 \prec \dots \prec x_{L-1} \prec a_1 \prec x_L \prec a_2 \prec \dots \prec a_K.$$

Определим линейный оператор $\partial \# \delta$ на элементах множества $A \# X$ следующим образом: $\partial \# \delta(a_i) = \partial(a_i)$ для любого $i \in \{1, \dots, K\}$, $\partial \# \delta(x_i) = \delta(x_i)$ для любого $i \in \{1, \dots, L-1\}$ и $\partial \# \delta(x_L) = \delta(x_L) + a_1$. Обозначим через $C \# Z$ множество $C \cup Z \cup \{a_1\}$. Ясно, что $\partial \# \delta$ является M -дифференциалом и множество $C \# Z$ состоит из $\partial \# \delta$ -тривиальных элементов. Обозначим M -пару $\mathcal{M}_{A \# X, B \# Y, C \# Z, \partial \# \delta}$ ($B \# Y = B \cup Y$) как $\mathcal{M}_{A, B, C, \partial} \# \mathcal{M}_{X, Y, Z, \delta}$. Мы положим $M \# 0 = M$, $0 \# M = M$ for any M -pair M . Операция $\#$ очевидно ассоциативна.

2.7. Определение M -пар L_k и R_l . Определим M -пары L_k и R_l ($k, l \geq 0$) следующим образом: $L_0 = R_0 = 0$, и при $k, l \geq 1$ мы определим L_k, R_l (с точностью до общего аддитивного сдвига градуировки) из (бесконечной) таблицы рис. 6. Градуировка M -пары L_k, R_l определена однозначно с точностью до общего сдвига. Каждая M -пара L_k, R_l принадлежит соответствующему множеству $\mathcal{D}_{A, B, C}$, где C определяется двойными отрезками.

2.8. Основная теорема. Рассмотрим тройку (A, B, C) упорядоченных градуированных множеств. Мы предполагаем, что A непусто.

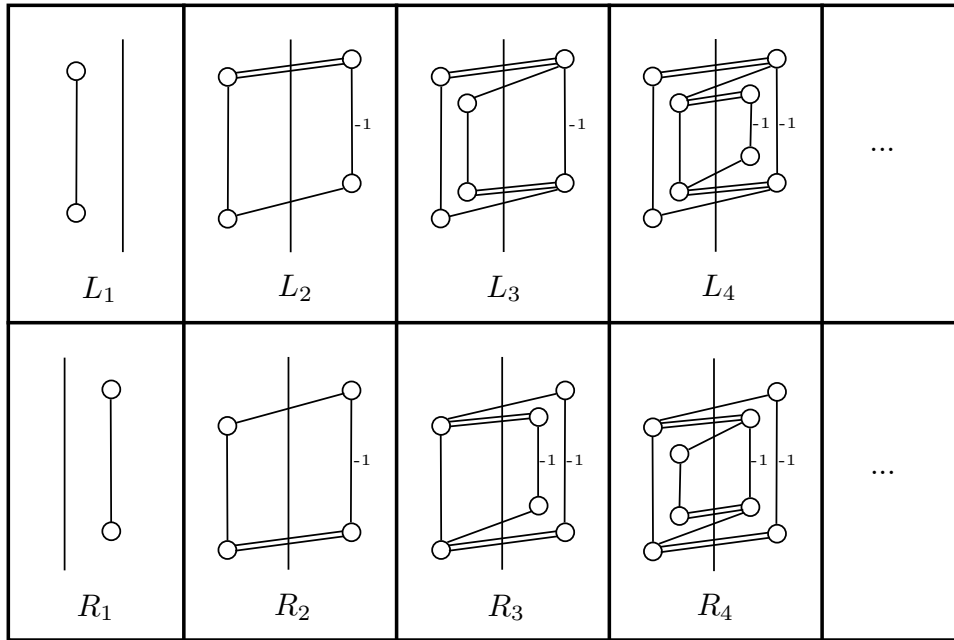


Рис. 6. Определение M -пар L_k и R_l .

Теорема 2.3 Число классов слабой эквивалентности конечно. Любой M -дифференциал $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ слабо эквивалентен единственному дифференциалу разложимому в прямую сумму дифференциалов M -пар типа:

$$L_k \# R_l (k + l \geq 1), L_k \# \left| \circ (k \geq 0), \circ \right| \# R_l (l \geq 0),$$

$$L_k \# \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right\} \# R_l (k, l \geq 0), \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right\}.$$

2.9. Замечания. Понятия слабой эквивалентности, операция $\#$ и последняя теорема есть результат наивных попыток “упрощения” M -дифференциала. В случае $A = B, C = \emptyset$ теорема 2.3 превращается в теорему из [3].

Утверждение о конечности числа классов слабой эквивалентности очевидно при $\mathbb{E} = \mathbb{Z}_p$ (само множество $\mathcal{D}_{A,B,C}$ в этом случае конечно) и нетривиально для $\mathbb{E} = \mathbb{Q}$.

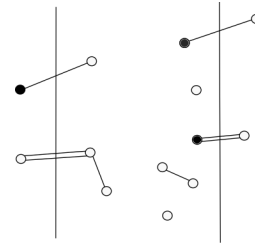


Рис. 7.

На рисунке 7 показаны результаты применения теоремы 2.3 к алгебраическим моделям функций рисунков 1 и 3.

3 О M -комплексах и M -парах с точностью до эквивалентности.

Эта глава содержит результаты важные сами по себе и нужные нам для доказательства теоремы 2.3. Для данного M -дифференциала мы построим эквивалентный M -дифференциал, имеющий относительно простой вид. (На уровне матричных элементов дифференциала мы выбираем эквивалентный дифференциал, имеющий много нулей в матрице.) Полученный в результате M -дифференциал мы назовем квазиэлементарным дифференциалом. Эта конструкция есть первый шаг в доказательстве теоремы 2.3. Окончание доказательства теоремы 2.3 (см. главу 4) состоит в дальнейшем упрощении построенного квазиэлементарного дифференциала.

Для конечного линейно упорядоченного множества $A = \{a_1 \prec \dots \prec a_N\}$ будем обозначать через A^k множество $\{a_1 \prec \dots \prec a_k\}$.

3.1. О структуре M -комплекса. Пусть A конечное линейно упорядоченное градуированное множество. M_A -дифференциал ∂ называется *элементарным дифференциалом*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1. для каждого $a \in A$ или $\partial(a) = 0$, или найдется $b \in A$ такой что $\partial(a) = b$;
2. $\partial(x) = \partial(y) = z$ и $x, y, z \in A$ влечет $x = y$.

Теорема 3.1 [3] *Любой M -дифференциал ∂ над полем \mathbb{E} эквивалентен единственному M -дифференциалу.* □

Доказательство. Мы приводим доказательство для полноты. Элементарный M -дифференциал, эквивалентный данному, явно строится по индукции следующим образом. Для одномерного M -комплекса утверждение тривиально. Допустим утверждение доказано для M -комплексов размерности k . Пусть $A = \{a_1 \prec \dots \prec a_{k+1}\}$. Рассмотрим M -комплекс

$\mathcal{M}_{A,\partial}$. Ограничение ∂_1 M -дифференциала ∂ на подкомплекс $\mathbb{E}(A^k)$ может быть приведено к элементарному виду по предположению индукции. Будем считать, что это уже сделано.

Определим отображение ∂^{-1} на элементах a_1, \dots, a_k следующим образом: если $\partial_1(a_j) = a_i$, то $\partial_1^{-1}(a_i) = a_j$, в остальных случаях $\partial_1^{-1}(a_i) = 0$. Рассмотрим $\partial(a_{k+1})$. Если $\partial(a_{k+1}) = 0$, то дифференциал ∂ элементарен и утверждение доказано. Пусть $\partial(a_{k+1}) = \sum_{i \in I \subset \{1, \dots, k\}} \lambda_i a_i$, $\lambda_i \neq 0$ при

$i \in I$. Поскольку дифференциал ∂_1 элементарен и $\partial^2(a_{k+1}) = 0$, то для каждого $i \in I$ выполняется $\partial(a_i) = 0$. Разложим множество I в объединение непересекающихся множеств – множества I_1 , состоящего из всех $i \in I$, таких что $\partial_1^{-1}(a_i) \neq 0$ и множества I_2 , состоящего из остальных элементов множества I .

Допустим, что множество I_2 пусто. Рассмотрим автоморфизм T , определенный на базисных векторах так: $a_{k+1} \mapsto a_{k+1} - \sum_{i \in I_1} \lambda_i \partial_1^{-1}(a_i)$, все

остальные базисные элементы T оставляет неподвижными. Очевидно, $T \in \text{Aut}_T(A)$. Дифференциал $\partial_T = T^{-1}\partial T$ является элементарным M -дифференциалом, поскольку $\partial_T(a_i) = \partial(a_i)$ при $i \in \{1, \dots, k\}$, и $\partial_T(a_{k+1}) = 0$.

Пусть множество I_2 непусто. Пусть l максимальный номер элемента из I_2 . Рассмотрим автоморфизм T , определенный на элементах базиса так: $a_{k+1} \mapsto a_{k+1} - \sum_{i \in I_1} \lambda_i \partial_1^{-1}(a_i)$, $a_l \mapsto \sum_{i \in I_2} \lambda_i a_i$, все остальные базисные элементы неподвижны. Очевидно, $T \in \text{Aut}_T(A)$. M -дифференциал ∂_T является элементарным M -дифференциалом, поскольку $\partial_T(a_{k+1}) = a_m$, $\partial_1^{-1}(a_m) = 0$ и на всех остальных элементах базиса ∂_T совпадает с ∂ .

Докажем единственность (мы следуем [6]). Обозначим через $d(m, n, \partial)$ размерность относительных гомологий $H_*(\mathbb{E}(A^m), \mathbb{E}(A), \partial)$. Размерности $d(m, n, \partial)$ зависят только от класса эквивалентности дифференциала ∂ . Пусть ∂ элементарный M -дифференциал и $\partial(a_i) = a_j$. Тогда, очевидно, справедливы следующие равенства:

$$d(i, j, \partial) = d(i-1, j-1, \partial) = d(i-1, j, \partial) + 1 = d(i, j-1, \partial) + 1.$$

И обратно – легко проверить, что если эти равенства выполняются, то $\partial(a_i) = a_j$. Следовательно элементарный M -дифференциал ∂ однозначно восстанавливается по числам $d(m, n, \partial)$. Единственность доказана. \square

3.2. Разбиение базиса M -комплекса на пары и гомологически существен-

ные элементы. Рассмотрим M -комплекс $\mathcal{M}_{A,\partial}$, $A = \{a_1 \prec \dots \prec a_N\}$. Пусть ∂_1 является элементарным M -дифференциалом эквивалентным ∂ (как в теореме 3.1). Скажем, что элементы базиса a_i, a_j M -комплекса $\mathcal{M}_{A,\partial}$ образуют ∂ -пару, если $\partial_1(a_i) = a_j$. Будем говорить, что элемент базиса (∂) -гомологически существенен, если он не участвует в ∂ -парах. По теореме 3.1, любой элемент множества A является или гомотологически существенным элементом или членом единственной ∂ -пары. Следующие утверждения леммы 3.2 описывают эту комбинаторную структуру на A в терминах M -дифференциала ∂ , не переходя к эквивалентному элементарному дифференциалу.

Обозначим через ι включение $\mathbb{E}(A^j) \rightarrow \mathbb{E}(A)$ (значение j будет ясно из контекста) и через ι_* индуцированное отображение в гомологиях.

Лемма 3.2 (1) *Элемент $a_j \in A$ степени l гомотологически существенен, если и только если*

$$\dim \iota_*(H_l(\mathbb{E}(A^j), \partial)) = \dim \iota_*(H_l(\mathbb{E}(A^{j-1}), \partial)) + 1.$$

Число гомотологически существенных элементов степени k равно $\dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial})$.

(2) *Элемент $a_i \in A$ не является гомотологически существенным элементом если и только если*

$$\iota_* H_*(\mathbb{E}(A^i), \partial) = \iota_* H_*(\mathbb{E}(A^{i-1}), \partial).$$

(3) *Элементы $a_m, a_n \in A$, $m > n$ образуют ∂ -пару если и только если*

$$\begin{aligned} \dim H_*(\mathbb{E}(A^m), \mathbb{E}(A^n), \partial) &= \dim H_*(\mathbb{E}(A^{m-1}), \mathbb{E}(A^{n-1}), \partial) = \\ &= \dim H_*(\mathbb{E}(A^{m-1}), \mathbb{E}(A^k), \partial) + 1 = \dim H_*(\mathbb{E}(A^m), \mathbb{E}(A^{n-1}), \partial) + 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждения леммы очевидны для элементарного дифференциала. Следовательно, по теореме 3.1 они справедливы и для любого M -дифференциала, поскольку размерности гомологий из этих утверждений зависят только от класса эквивалентности M -дифференциала. \square

3.3. Граничные гомотологически существенные элементы M -пар. Фильтрация на топологическом пространстве или комплексе естественно индуцирует фильтрацию на любом подпространстве их гомологий. Это простое наблюдение ведет к следующим определениям.

Рассмотрим M -пару $\mathcal{M}_{A,B,\partial}$. Подпространство $\mathbb{E}(B^k) \subset \mathbb{E}(B)$ является ∂_B -инвариантным, следовательно градуированное пространство гомологий $H_*(\mathbb{E}(B^k), \partial_B)$ корректно определено. Через $\iota_*: H_*(\mathbb{E}(B^k), \partial_B) \rightarrow H_*(\mathbb{E}(B), \partial_B)$ обозначим отображение индуцированное включением $\mathbb{E}(B^k) \hookrightarrow \mathbb{E}(B)$. Пусть $\partial_*: H_{*+1}(\mathbb{E}(A), \mathbb{E}(B), \partial) \rightarrow H_*(\mathbb{E}(B), \partial_B)$ граничное отображение длинной точной последовательности пары $(\mathbb{E}(A), \mathbb{E}(B), \partial)$. Рассмотрим пересечения

$$I_k = \iota_* H_*(\mathbb{E}(B^k), \partial_B) \cap \partial_* H_*(\mathbb{E}(A), \mathbb{E}(B), \partial) \subset H_*(\mathbb{E}(B), \partial_B).$$

Элемент базиса $b_k \in B$ назовем (∂) -границно гомологически существенным, если $I_k \neq I_{k-1}$ (положим $I_0 = 0$).

Мы обозначим через $H(\partial)$ множество всех ∂ -границно гомологически существенных элементов. Ясно, что если M -дифференциал $\partial(A, B)$ -эквивалентен M -дифференциалу ∂' , то $H(\partial) = H(\partial')$.

Рассмотрим M -пару $\mathcal{M}_{A,B,\partial}$.

Лемма 3.3 *Каждый ∂ -границно гомологически существенный элемент является ∂_B -гомологически существенным. Общее число ∂ -границно гомологически существенных элементов степени k равно $\dim \partial_*(H_{k+1}(\mathbb{E}(A), \mathbb{E}(B), \partial))$.*

Доказательство. По лемме 3.2 примененной к M -комплексу $\mathcal{M}_{B,\partial_B}$, $\iota_* H_*(\mathbb{E}(B^l), \partial_B) \neq \iota_* H_*(\mathbb{E}(B^{l-1}), \partial_B)$ если и только если элемент b_l является ∂_B -гомологически существенным. Для таких l размерности пространств $\iota_* H_*(\mathbb{E}(B^l), \partial_B)$ и $\iota_* H_*(\mathbb{E}(B^{l-1}), \partial_B)$ отличаются на 1, так что мы получаем полный градуированный флаг в $\iota_* H_*(\mathbb{E}(B), \partial_B)$, состоящий из пространств $\iota_* H_*(\mathbb{E}(B^k), \partial_B)$. Пересечение градуированного подпространства с полным флагом есть полный флаг в подпространстве. Это доказывает первое утверждение леммы. Пространства $\iota_* H_*(\mathbb{E}(B^l), \partial_B)$ и $\partial_*(H_*(\mathbb{E}(A), \mathbb{E}(B), \partial))$ есть прямые суммы своих однородных компонент. Из этого вытекает второе утверждение леммы. \square

3.4. Алгебраическая модель функции. Пусть F строгая функция Морса на компактном многообразии M . Рассмотрим ее алгебраическую модель (с коэффициентами в \mathbb{E}) $\mathcal{M}_{A_F, B_F, \partial}$, пусть C_F множество внешних критических точек $F|_{\partial M}$. Соединим некоторые свойства алгебраической модели в предложении.

Предложение 3.4 1. При каждом i $H_i(\mathcal{M}_{A_F, \partial}, \mathcal{M}_{B_F, \partial_{B_F}}) = H_i(M, \partial M; \mathbb{E})$, $H_i(\mathcal{M}_{B_F, \partial_{B_F}}) = H_i(\partial M; \mathbb{E})$, $H_i(\mathcal{M}_{A_F, \partial}) = H_i(M; \mathbb{E})$;

2. M -комплекс $\mathcal{M}_{B_F, \partial_{B_F}}$ есть алгебраическая модель функции $F|_{\partial M}$ и, следовательно, зависит (с точностью до эквивалентности) только от этой функции;
3. Любой элемент множества $C_F \subset B_F$, состоящего из всех внешних критических точек, ∂ -тривиален;
4. Множество $H_F \subset B_F$, состоящее из всех гранично гомологически существенных критических точек функции $F|_{\partial M}$, совпадает с множеством всех гранично гомологически существенных элементов пары $\mathcal{M}_{A_F, B_F, \partial}$;
5. Алгебраическая модель функции F изоморфна подлдящей алгебраической модели функции $\psi \circ F \circ \varphi$, где $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ сохраняющий ориентацию диффеоморфизм прямой и $\varphi: M \rightarrow M$ диффеоморфизм. Класс изоморфизма алгебраической модели сохраняется пока F непрерывно меняется в пространстве строгих функций Морса. \square

3.5. Множества P, Q, R и X, Y, Z и биекции. Рассмотрим M -пару $\mathcal{M}_{A, B, \partial_0}$. По теореме 3.1, M -дифференциал ∂_0 M -пары $\mathcal{M}_{A, B, \partial_0}$ (A, B)-эквивалентен такому M -дифференциалу ∂ , что ∂_B и $\partial_{A \setminus B}$ являются элементарными M -дифференциалами.

Дифференциал ∂_B элементарен, следовательно, множество B раскладывается в определение непересекающихся подмножеств P, Q, R так что ∂_B ограничивается на биекцию $Q \rightarrow R$ и ∂_B равен нулю на P . Аналогично, дифференциал $\partial_{A \setminus B}$ элементарен, следовательно, множество $A \setminus B$ раскладывается в определение непересекающихся подмножеств X, Y, Z так что $\partial_{A \setminus B}$ ограничивается на биекцию $Y \rightarrow Z$ и $\partial_{A \setminus B}$ равен нулю на X .

По теореме 3.1, множества P, Q, R и X, Y, Z и биекции $Q \rightarrow R$ и $Y \rightarrow Z$ зависят только от класса эквивалентности дифференциала ∂_0 .

3.6. Определение квазиэлементарного дифференциала. Рассмотрим векторное пространство L и базис W этого пространства. Будем говорить,

что $v = \sum_{w \in W} v_w w \in L$ содержит $a \in W$ (или a появляется в v) если $v_a \neq 0$.

Мы скажем, что $M_{A,B}$ -дифференциал ∂ квазиэлементарен если он удовлетворяет следующим условиям:

1. дифференциалы ∂_B и $\partial_{A \setminus B}$ элементарны;
2. для каждого элемента $x \in X$, вектор $\partial(x)$ содержит не более одного элемента множества P ;
3. если $\partial(x)$ содержит $p \in P$, то коэффициент $\partial(x)_p$ равен 1;
4. любой элемент множества P появляется в не более чем одном векторе $\partial(x)$ при $x \in X$.

3.7. От M -дифференциалов к квазиэлементарным дифференциалам. Напомним, что $H(\partial)$ обозначает множество всех ∂ -гранично гомологически существенных элементов M -дифференциала ∂ (см. 3.3).

Лемма 3.5 (1) *Любой M -дифференциал эквивалентен квазиэлементарному M -дифференциалу.*

(2) *Пусть M -дифференциал ∂ квазиэлементарен. Множество $H(\partial)$ совпадает с множеством элементов P , появляющихся в векторах $\partial(x)$ при $x \in X$.*

(3) *Пусть квазиэлементарные M -дифференциалы ∂, ∂_1 эквивалентны. Для любых $x \in X$ и $p \in P$, $\partial(x)$ содержит p если и только если $\partial_1(x)$ содержит p .*

Отметим, что класс эквивалентности M -дифференциала может содержать более одного квазиэлементарного дифференциала. Доказательство леммы 3.5 содержится в 3.9 ниже.

3.8. Инъекция h_+ . Рассмотрим M -пару $\mathcal{M}_{A,B,\partial}$. Определим отображение $h_+ : H(\partial) \rightarrow X$ следующим образом. Пусть ∂' квазиэлементарный M -дифференциал эквивалентный ∂ . Для $b \in H(\partial)$, $h_+(b)$ есть, по определению, такой элемент $x \in X$, что $\partial'(x)$ содержит b . По лемме 3.5, отображение h_+ корректно определено и зависит только от класса эквивалентности M -дифференциала ∂ . Ясно, что h_+ инъекция. Отметим, что h_+ увеличивает степень на 1.

Следующее утверждение есть немедленное следствие леммы 3.5.

Следствие 3.6 *Разбиения*

$$B = P \sqcup Q \sqcup R, A \setminus B = X \sqcup Y \sqcup Z,$$

биекции $Q \rightarrow R$ и $Y \rightarrow Z$, подмножество $H = H(\partial) \subset P$ и инъекции $h_+ : H \rightarrow X$ являются инвариантами M -пары $\mathcal{M}_{A,B,\partial}$ (см. рис. 8 на котором схематически изображены эти множества и отображения). \square

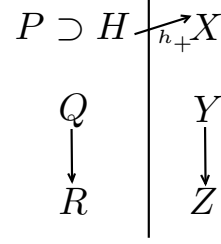


Рис. 8.

3.9. Доказательство леммы 3.5. Докажем первое утверждение леммы. Рассмотрим M -пару $\mathcal{M}_{A,B,\partial}$, $A = \{a_1 \prec \dots \prec a_N\}$.

Мы предполагаем, что M -дифференциалы ∂_B , $\partial_{A \setminus B}$ элементарны. Первое утверждение очевидно, если множество X пусто. Предположим, X непусто. Обозначим его элементы $x_1 < \dots < x_I$ в соответствии с порядком, индуцированным из порядка на A . Используем индукцию для доказательства следующего утверждения: ∂ эквивалентен M -дифференциалу $\delta = \delta_k$, такому что

1. для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ вектор $\delta(x_i)$ содержит не более одного элемента P ;
2. каждый элемент множества P появляется не более чем в одном $\delta(x_j)$ при $j \in \{1, \dots, k\}$ и $\partial_B = \delta_B$, $\partial_{A \setminus B} = \delta_{A \setminus B}$.

Пусть $k = 1$. Вектор $\partial(x_1)$ может содержать только элементы из множеств P, R , поскольку M -дифференциалы $\partial_{A \setminus B}, \partial_B$ элементарны и $\partial^2(x_1) = 0$. Следовательно, $\partial(x_1) = p + r$, $p \in \mathbb{E}(P), r \in \mathbb{E}(R)$. Если $p = 0$, то первый шаг индукции доказан. Рассмотрим случай $p \neq 0$. Пусть p_i максимальный элемент из P , появляющийся в p . Рассмотрим $T_p \in \text{Aut}_T(A, B)$ такой что $T_p(p_i) = p$, а на оставшихся базисных элементах T_p неподвижен. Тогда, M -дифференциал $\delta_1 = T_p^{-1} \partial T_p$ удовлетворяет нужным свойствам. Это устанавливает базу индукции.

Пусть ∂ эквивалентен δ_k выше. Мы можем полагать, что $\partial = \delta_k$. Если $\partial(x_{k+1})$ не содержит элементов из P , то $\delta_{k+1} = \partial$ есть нужный нам дифференциал. Пусть $x \in \mathbb{E}(\{x_1, \dots, x_k\})$. Обозначим через $T_x \in \text{Aut}_T(A, B)$

автоморфизм отображающий x_{k+1} в сумму $x_{k+1} + x$ и неподвижный на остальных элементах базиса. Для любого $x \in \mathbb{E}(\{x_1, \dots, x_k\})$, дифференциал $T_x^{-1}\partial T_x$ удовлетворяет k -й гипотезе индукции и, для подходящего $x_0 \in \mathbb{E}(\{x_1, \dots, x_k\})$, вектор $T_{x_0}^{-1}\partial T_{x_0}(x_{k+1})$ не содержит элементов из P , которые появляются в $T_{x_0}^{-1}\partial T_{x_0}(x_i)$ при $i \in \{1, \dots, k\}$. Итак, мы можем полагать, что $\partial(x_{k+1})$ не содержит элементов из P , которые появляются в $\partial(x_i)$ при $i \in \{1, \dots, k\}$. Пусть $\partial(x_{k+1}) = p + q$. Тогда дифференциал $\delta_{k+1} = T_p^{-1}\partial T_p$ обладает нужными свойствами. Первое утверждение леммы доказано.

Пусть ∂ квазиэлементарный M -дифференциал. Тогда пространства $I_k = \iota_* H_*(\mathbb{E}(B_k), \partial_B) \cap \partial_* H_*(\mathbb{E}(A), \mathbb{E}(B), \partial)$ из определения ∂ -гранично гомологически существенных элементов натянуто на элементы $b_i \in \{b_1, \dots, b_k\} \cap P$, появляющиеся в векторах $\partial(x)$ при $x \in X$. Это доказывает второе утверждение леммы.

Докажем третье утверждение. Пусть (A, B) пара конечных линейно упорядоченных градуированных множеств. Пусть $B = \{b_1 \prec \dots \prec b_K\}$, $A \setminus B = \{a_1 \prec \dots \prec a_L\}$. Обозначим через A' упорядоченное градуированное множество, которое равно (как градуированное множество) множеству A с таким линейным порядком \prec_n :

$$b_1 \prec_n \dots \prec_n b_K \prec_n a_1 \prec_n \dots \prec_n a_L.$$

$M_{A,B}$ -дифференциал ∂ естественно индуцирует $M_{A'}$ -дифференциал ∂' который равен (как линейное отображение) $M_{A,B}$ -дифференциалу ∂ . Очевидно, что отображение посылающее ∂ в ∂' переводит (A, B) -эквивалентные M в A' -эквивалентные.

Ввиду теоремы 3.1, третье утверждение следует из следующей леммы.

Лемма 3.7 *Пусть M -дифференциал ∂ квазиэлементарен. Если $p \in H(\partial)$ появляется в $\partial(x)$ при $x \in X$, то элементы x, p образуют ∂' -пару.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что $\partial(x) = \lambda p + r$, где $\lambda \neq 0$ и $r \in \mathbb{E}(R)$. Возьмем $q \in \mathbb{E}(Q)$, такое что $\partial(q) = r$. Легко следует из $\partial^2 = 0$, что элемент $p \in H(\partial)$ не появляется в $\partial(z)$, $z \in Z$. Пусть $y_1, \dots, y_k \in Y$ все элементы, такие что p появляется в $\partial(y_i)$ с коэффициентом $\lambda_i \neq 0$. Обозначим $\partial_{A \setminus B}(y_i)$ через z_i . Рассмотрим отображение T такое что $T(z_i) = z_i + \lambda_i p$ при $i \in \{1, \dots, k\}$ и T неподвижно на остальных элементах базиса. Каждый z_i больше p в множестве

A' . Поэтому $T \in \text{Aut}_T(A')$. Дифференциал $\partial'_1 = T^{-1}\partial'T$ является $M_{A'}$ -дифференциалом A' -эквивалентным ∂' . Элемент p появляется в $\partial'_1(x)$ и не появляется в ∂'_1 -образах других элементов базиса. Обозначим через T_1 автоморфизм, такой что $T_1(x) = x - q$ и T_1 неподвижен на остальных элементах базиса. $M_{A'}$ -дифференциал $\partial'_2 = T_1^{-1}\partial'_1T_1$ A' -эквивалентен $M_{A'}$ -дифференциалу ∂'_1 и подпространство $\mathbb{E} \otimes \{x, p\}$ является прямым слагаемым. Условие $\partial'_2(x) = \lambda p$ означает, что x, p образуют ∂' -пару. \square

4 Доказательство теоремы 2.3.

В этой главе мы доказываем теорему 2.3. Наша стратегия следующая. На первом шаге для M -дифференциала $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ мы рассмотрим квазиэлементарный M -дифференциал $\tilde{\partial} \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ эквивалентный $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$. На втором шаге мы начнем процедуру обнуления некоторых матричных элементов M -дифференциала ∂' . Когда эта процедура закончит работу мы получим слабо эквивалентный ∂ квазиэлементарный дифференциал который разложим в слагаемые (с точностью до действия сопряжениями диагональной подгруппы $\text{Aut}_T(A, B)$) теоремы 2.3.

4.1. Ненулевые матричные элементы.

Рассмотрим M -дифференциал $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$. По лемме 3.5, существует квазиэлементарный M -дифференциал $\tilde{\partial}$ эквивалентный ∂ . По лемме 2.1, все элементы множества C являются $\tilde{\partial}$ -тривиальными. Поэтому $\tilde{\partial} \in \mathcal{D}_{A,B,C}$. Мы обозначим через P, Q, R, X, Y, Z, H и h_+ множества и отображение из следствия 3.6. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение со значениями в \mathbb{E} на $\mathbb{E}(A)$: $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Мы будем использовать следующую простую лемму. Мы оставляем ее доказательство (которое легко следует из $\tilde{\partial}^2 = 0$) читателю.

Лемма 4.1 Пусть $\tilde{\partial}$ квазиэлементарный M -дифференциал.

Пусть элементы $q \in Q$, $r \in R$, $y \in Y$, $z \in Z$ таковы, что $\tilde{\partial}(q) = r$, $\tilde{\partial}_{A \setminus B}(y) = z$. Тогда $\langle \tilde{\partial}(y), q \rangle = -\langle \tilde{\partial}(z), r \rangle$.

Пусть элементы $y \in Y$ и $z \in Z$ таковы, что $\tilde{\partial}_{A \setminus B}(y) = z$, и $b \in B$ появляется в $\tilde{\partial}(z)$. Тогда $b \in R$ и существует $q \in Q$, такой что $\tilde{\partial}(q) = b$ и q появляется в $\tilde{\partial}(y)$. \square

Для элемента $c \in C$ мы обозначим через $c_+ \in A$ следующий за c элемент. Элемент c_+ принадлежит множеству $A \setminus B$. Через C_+ обозначим множество всех элементов c_+ при $c \in C$. Мы будем говорить, что элементы c и c_+ образуют C -пару (или (c, c_+) есть C -пара). Для элемента $a \in C_+$ мы обозначим через a_- элемент c такой что $c_+ = a$.

Следующая лемма описывает подмножество из ненулевых элементов матрицы $\tilde{\partial}$.

Лемма 4.2 *Допустим элементы $a \in A \setminus B$, $b \in B$, $b \prec a$ удовлетворяют по крайней мере одному из следующих условий:*

1. (b, a) – C -пара;
2. $b \in H$ и $a = h_+(b)$;
3. $a \in Y$, $b \in Q$, и элементы $\tilde{\partial}(b)$ и $\tilde{\partial}_{A \setminus B}(a)$ образуют C -пару;
4. $a \in Z$, $b \in R$, и элементы $q \in Q$, $y \in Y$ таковы, что $\tilde{\partial}(q) = b$, $\tilde{\partial}_{A \setminus B}(y) = a$ образуют C -пару.

Тогда $\langle \tilde{\partial}(a), b \rangle \neq 0$.

Доказательство. Если (b, a) удовлетворяют (1) или (2) то $\langle \tilde{\partial}(a), b \rangle \neq 0$ по определениям C и h_+ соответственно. If (b, a) удовлетворяет (3) то, по лемме 4.1, $\langle \tilde{\partial}(a), b \rangle = -\langle \tilde{\partial}(\tilde{\partial}_{A \setminus B}(a)), \tilde{\partial}(b) \rangle$. Поскольку $(\tilde{\partial}(b), \tilde{\partial}_{A \setminus B}(a))$ есть C -пара, то $\langle \tilde{\partial}(a), b \rangle \neq 0$. При условии (4) мы имеем $\langle \tilde{\partial}(y), q \rangle = -\langle \tilde{\partial}(a), b \rangle$ и, по лемме 4.1, $\langle \tilde{\partial}(a), b \rangle \neq 0$ поскольку (q, y) являются C -парой. \square

Следующая простая лемма полностью описывает множество ненулевых элементов квазиэлементарного дифференциала.

Лемма 4.3 *Рассмотрим любой понижающий порядок оператор δ градуировки -1 на $\mathbb{E}(A)$, переводящий $\mathbb{E}(B)$ в себя, такой что*

1. δ_B и $\delta_{A \setminus B}$ элементарные дифференциалы, так что множества P, Q, R, X, Y, Z определены;
2. любой элемент из P входит не более чем в один вектор $\delta(x)$ при $x \in X$;

3. в каждый вектор $\delta(x)$ входит не более чем один элемент из R , эти два условия определяют инъекцию $h+$ множества элементов, встречающихся в $\delta(x)$ при $x \in X$, в множество X ;
4. Если $\delta_{A \setminus B}(y) = z$ при $y \in Y$ и $z \in Z$ и $\delta_B(q) = r$ при $q \in Q$ и $r \in R$, то числа $\langle \delta(y), q \rangle$ и $\langle \delta(z), r \rangle$ только одновременно могут обратиться в ноль

Тогда найдется квазиэлементарный дифференциал ∂ с таким же множеством ненулевых элементов. \square

4.2. Обнуление матричных элементов дифференциала. От M -дифференциала к минимальному дифференциалу. Назовем квазиэлементарный M -дифференциал $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ минимальным, если любая пара $a \in A \setminus B$, $b \in B$, $b \prec a$, такая что $\langle \partial(a), b \rangle \neq 0$ удовлетворяет по крайней мере одному из условий леммы 4.2. Мы также будем называть соответствующую M -пару минимальной.

Назовем M -дифференциалы ∂, ∂' подобными если $\langle \partial(a_i), a_j \rangle = 0$ если и только если $\langle \partial'(a_i), a_j \rangle = 0$ при всех i, j (другими словами – нули в матрицах ∂ и ∂' стоят на тех же местах).

Лемма 4.4 Для M -дифференциала $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ найдется минимальный M -дифференциал $\delta \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ слабоэквивалентный ∂ . Все такие минимальные дифференциалы подобны.

Доказательство. Пусть ∂_1 квазиэлементарный M -дифференциал эквивалентный ∂ . Мы построим конечную последовательность M -дифференциалов $\partial_1, \dots, \partial_m$ так что для любых $a \in A \setminus B, b \in B$ равенство $\langle \partial_{i-1}(a), b \rangle = 0$ влечет $\langle \partial_i(a), b \rangle = 0$ при любом $i \in \{2, \dots, m\}$, M -дифференциал ∂_i квазиэлементарен и слабо эквивалентен ∂_{i-1} , $\partial_m = \delta$ является минимальным M -дифференциалом.

Мы действуем по индукции. Предположим, что $\partial_i = \rho$ не минимальный M -дифференциал. Рассмотрим пару $a \in A \setminus B, b \in B$, такую что $\langle \rho(a), b \rangle \neq 0$, и (b, a) не удовлетворяют любому из условий (1) – (4) леммы 4.2.

Лемма 4.5 Пара (a, b) удовлетворяет одному из условий:

N1. $a \in Y, b \in Q$ и никакая из пар $(b, a), (r, z)$ не является C -парой, где $r = \rho(b), z = \rho_{A \setminus B}(a)$;

- N2.* $a \in Y, b \in R$ и (b, a) не является C -парой;
N3. $a \in Y, b \in P$ и (b, a) не C -пара;
N4. $a \in Z, b \in R$ и каждая из пар $(b, a), (q, y)$ не C -пара, где $q \in Q$ и $y \in Y$ такие элементы, что $\rho(q) = b, \rho_{A \setminus B}(y) = a$;
N5. $a \in X, b \in R$ и (b, a) не C -пара.

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи $a \in Y, a \in Z$ и $a \in X$.

Пусть $a \in Y$. Если $b \in Q$ то (b, a) автоматически не удовлетворяет условиям (1), (2) и (4) леммы 4.2. Следовательно, выполняется $N1$, поскольку оно противоречит условию (3). Если $b \in R$, то (b, a) автоматически не удовлетворяет условиям (2), (3) и (4). Следовательно, выполняется $N1$, поскольку оно противоречит условию (1). Если $b \in P$, то (b, a) автоматически не удовлетворяет условиям (2), (3) и (4) и выполняется $N3$.

Пусть $a \in Z$. Тогда, по лемме 4.1, $b \in R$. Пара (b, a) автоматически не удовлетворяет условиям (2) и (3). Следовательно, она удовлетворяет $N4$, поскольку оно противоречит условиям (1) и (4).

Пусть $a \in X$. В этом случае $b \notin P$, иначе мы имели бы $a = h_+(b)$. Равенство $\rho^2(a) = 0$ влечет $b \notin Q$. Следовательно $y \in R$ и мы получаем условие $N5$. \square

Для каждого случая $N1$ - $N5$ мы определим последующий M -дифференциал ∂_{i+1} следующей леммой.

Лемма 4.6 Пусть ∂_{i+1} линейный оператор такой, что:

Если (a, b) удовлетворяет $N1$, то $\partial_{i+1}(a) = \rho(a) - \langle \rho(a), b \rangle b$, $\partial_{i+1}(z) = \rho(z) - \langle \rho(z), r \rangle r$, где $r = \rho(b), z = \rho_{A \setminus B}(a)$, и ∂_{i+1} совпадает с ρ на остальных элементах базиса;

Если (a, b) удовлетворяет $N4$, то $\partial_{i+1}(a) = \rho(a) - \langle \rho(a), b \rangle b$, $\partial_{i+1}(y) = \rho(y) - \langle \rho(y), q \rangle q$, где $q \in Q$ такой что $b = \rho(q), a = \rho_{A \setminus B}(y)$, и ∂_{i+1} совпадает с ρ на остальных элементах базиса;

Если (a, b) удовлетворяет $N2$ или $N3$ или $N5$, то $\partial_{i+1}(a) = \rho(a) - \langle \rho(a), b \rangle b$ и ∂_{i+1} совпадает с ρ на остальных элементах базиса;

В каждом из этих случаев ∂_{i+1} квазиэлементарный M -дифференциал $\partial_{i+1} \in \mathcal{D}_{A, B, C}$ и ∂_{i+1} слабо эквивалентен ρ .

Доказательство. Если (a, b) удовлетворяет $N1$, то ∂_{i+1} равен $S_1 \rho S_1^{-1}$ для автоморфизма S_1 , такого что $S_1(x) = x - \langle \rho(a), b \rangle b$ и S_1 неподвижен на остальных элементах базиса. Поэтому ∂_{i+1} является дифференциалом

($\partial_{i+1}^2 = 0$). Матричные элементы $\langle \partial_{i+1}(a), b \rangle$ и $\langle \partial_{i+1}(z), r \rangle$ равны нулю. В самом деле,

$$\langle \partial_{i+1}(a), b \rangle = \langle \rho(a) - \langle \rho(a), b \rangle b, b \rangle = \langle \rho(a), b \rangle - \langle \rho(a), b \rangle = 0$$

и

$$\langle \partial_{i+1}(z), r \rangle = \langle \rho(z + \langle \rho(a), b \rangle b), r \rangle = \langle \rho(a), b \rangle + \langle \rho(z), r \rangle = 0.$$

Очевидно, все остальные матричные элементы $\langle \partial_{i+1}(a_m), a_n \rangle$ дифференциала ∂_{i+1} совпадают с матричными элементами $\langle \rho(a_m), a_n \rangle$ дифференциала ρ . Следовательно, ∂_{i+1} принадлежит $\mathcal{D}_{A,B,C}$ и квазиэлементарен. Подпространство $\mathbb{E}(B)$ S_1 -инвариантно и автоморфизмы $S_1|_B$ и $S_1|_{A \setminus B}$ верхнетреугольны по построению, следовательно ∂_{i+1} слабо эквивалентен ρ .

Доказательство в оставшихся случаях аналогично. Если (a, b) удовлетворяет Nj ($j \in \{2, 3, 4, 5\}$), то $\partial_{i+1} = S_j \rho S_j^{-1}$. Оператор S_4 действует нетривиально только на элемент a и $S_4(a) = a + \langle \rho(a), b \rangle q$. Операторы S_2 и S_5 действуют нетривиально только на элемент a : $S_2(a) = S_5(a) = a + \langle \rho(a), b \rangle q$, где $q \in Q$ и $\partial(q) = b$. Оператор S_3 действует нетривиально только на элемент $y = \rho_{A \setminus B}(a)$ и $S_3(y) = y - \langle \rho(a), b \rangle q$. \square

Множество ненулевых элементов минимального M -дифференциала слабо эквивалентного ∂ однозначно определено множествами P, Q, R, X, Y, Z, H и отображением h_+ . Следовательно, все минимальные M -дифференциалы слабо эквивалентные ∂ подобны. \square

4.3. Окончание доказательства. Неразложимые слагаемые минимального дифференциала. Доказательство теоремы 2.3 заканчивает следующая лемма.

Лемма 4.7 *Пусть $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ есть минимальный квазиэлементарный M -дифференциал. Тогда каждое неразложимое слагаемое дифференциала ∂ эквивалентно единственному слагаемому из теоремы 2.3.*

Доказательство. Пусть $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ квазиэлементарный дифференциал. Рассмотрим соответствующие множества P, Q, R, X, Y, Z, H и отображение h_+ . Определим граф $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\partial)$ следующим образом. Вершины графа \mathcal{G} есть все одноэлементные подмножества в P и в X , все двуэлементные подмножества $\{p, q\}$, такие что $p \in P, q \in Q$ и $\partial(p) = q$, и все двуэлементные подмножества $\{y, z\}$, такие что $y \in Y, z \in Z$ и $\partial|_{A \setminus B}(y) = z$. Мы

изображаем вершины, соответствующие элементам C и C_+ (C_+ определено в 4.2), кружками с двумя отрезками, мы изображаем вершины, соответствующие элементам H и $h_+(H) \subset X$, черными кружками. Легко убедиться, что всего есть шестнадцать типов вершин. Все возможные типы вершин показаны на рис. 9. Вершины графа $\mathcal{G}(\partial)$ естественно соответствуют фрагментам изображения ∂ .

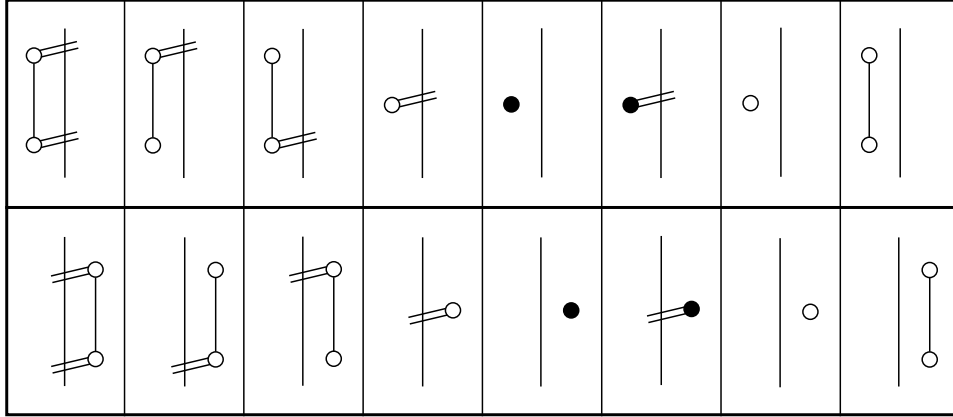


Рис. 9. Вершины $\mathcal{G}(\partial)$.

Две различные вершины α и β графа $\mathcal{G}(\partial)$ соединены не более чем одним ребром, мы соединяем α и β ребром, если и только если найдутся элементы $a \in \alpha$ и $b \in \beta$, такие что $\langle \partial(a), b \rangle \neq 0$ или $\langle \partial(b), a \rangle \neq 0$.

Ясно, что связные компоненты $\mathcal{G}(\partial)$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с неразложимыми слагаемыми ∂ . Простой проверкой выполнения условий минимальности мы получаем следующую лемму.

Лемма 4.8 Пусть $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ минимальный квазиэлементарный дифференциал. Вершина графа $\mathcal{G}(\partial)$ изолирована если и только если она имеет тип $\circ|, \circ|, \circ|$ или $\circ|$. Соответствующее эквивалентное прямое слагаемое теоремы 2.3 есть $\circ|\#R_0, L_1\#R_0, L_0\#\circ$ и $L_0\#R_1$ соответственно. \square

В дальнейшем мы будем полагать, что $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ минимальный квазиэлементарный дифференциал и $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\partial)$ его граф.

Рассмотрим вершины типов $\circ|$ и $\circ|$. Мы говорим, что вершина $\{p, q\}, p \in P, q \in Q, \partial(p) = q$ типа $\circ|$ (соотв. $\{y, z\}, y \in Y, z \in Z, \partial(y) = z$

типа \textcircled{B}) *замкнута* если элементы p_+, q_+ образуют $\partial_{A \setminus B}$ -пару (соотв. y_-, q_- образуют ∂_B -пару). Мы также говорим, что вершина типа $\bullet \dashv$ ($\dashv \bullet$) *замкнута* если она содержит элемент $c \in C \cap H$ такой что $c_+ = h_+(c)$ (соотв. $c \in C_+ \cap h_+(H)$ такой что $h_+(c_-) = c$). Мы говорим, что вершины типов \textcircled{A} , \textcircled{B} , $\bullet \dashv$ или $\dashv \bullet$ *открыты* если они не замкнуты.

Лемма 4.9 *Каждая замкнутая вершина типа \textcircled{A} или \textcircled{B} соответствует прямому слагаемому ∂ которое эквивалентно слагаемому $\textcircled{A}^{\oplus 1}$ теоремы 2.3. Каждая замкнутая вершина типа $\bullet \dashv$ или $\dashv \bullet$ соответствует прямому слагаемому ∂ которое эквивалентно слагаемому $\textcircled{A}^{\oplus 1}$ теоремы 2.3. \square*

Мы будем предполагать, что граф $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\partial)$ ($\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$) не содержит замкнутых и изолированных вершин. Для вершины a графа \mathcal{G} рассмотрим ее замкнутую окрестность $B(a)$ (a и все вершины примыкающие к a в \mathcal{G}). Мы изображаем все элементы A порождающие вершины $B(a)$ похожим образом на изображение ∂ не заботясь о значении ненулевых коэффициентов. Так что рисунок $B(a)$ есть фрагмент рисунка ∂ с точностью до значений ненулевых коэффициентов.

Можно показать полным перебором, что таблица рис. 10 содержит полностью всевозможные картинки окрестностей $B(a)$. Из этой таблицы мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 4.10 *Каждая вершина графа \mathcal{G} имеет валентность 2 или 1. Все вершины типов \textcircled{A} , \textcircled{B} , $\bullet \dashv$ и $\dashv \bullet$ имеют валентность 2 в \mathcal{G} . Все вершины типов \textcircled{A} , \textcircled{B} , \bullet , \dashv , \textcircled{A} , \textcircled{B} , \textcircled{A} , \textcircled{B} имеют валентность 1 в \mathcal{G} . \square*

Согласно утверждению 4.10 каждая вершина v типа \textcircled{A} или \textcircled{B} имеет валентность 2 в \mathcal{G} . Одно из ребер, начинающихся в v естественно выделено и мы наделим его ориентацией следующим образом.

Множество A упорядочено, $A = \{a_1 \prec \dots \prec a_N\}$. Введем вспомогательный порядок \prec_C на A , полученный из порядка \prec транспозициями всех C -пар: $c_+ \prec_C c$ при всех $c \in C$. Из рис. 10 видно, что для каждой вершины $v = \{a \prec b\}$ типа \textcircled{A} или \textcircled{B} найдется единственная примыкающая к v вершина $u = \{x \prec y\}$, такая что $a \prec_C x \prec_C y \prec_C b$ (скажем

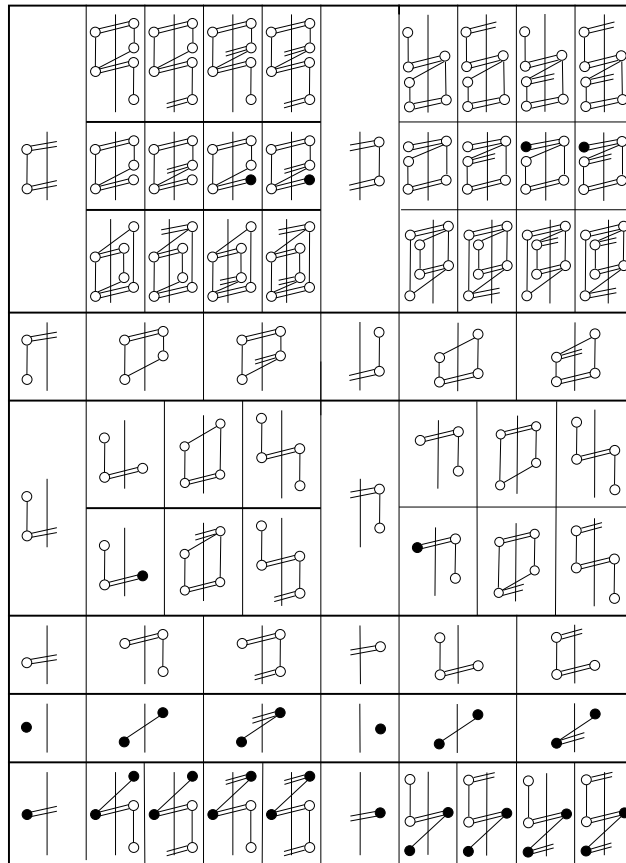


Рис. 10. Примыкающие вершины в графе \mathcal{G} в \mathcal{d} .

в этом случае, что u вложена в v). Ориентируем ребро от v к u и назовем его *ориентированным* ребром. Назовем вершину v типа \mathfrak{F} или \mathfrak{H} *головной* (или просто *головой*), если v не является конечной точкой на ориентированном ребре \mathcal{G} . Каждая головная вершина типа \mathfrak{F} продолжается в соответствии с ориентированными ребрами последовательностью вершин $\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}, \dots$ ($\mathfrak{F}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \dots$ в случае \mathfrak{H}) и заканчивается вершиной типа \mathfrak{H} или \mathfrak{F} в точности так как это показано на рис. 6 для L_k, R_l при $k, l \geq 3$. Назовем эту, следующую за головой, часть графа \mathcal{G} *хвостом* графа \mathcal{G} .

Если связная компонента графа \mathcal{G} содержит вершину типа \mathfrak{H} или \mathfrak{F} , то она содержит по крайней мере одну голову, поскольку найдется

вершина типа \textcircled{H} или \textcircled{F} не вложенная в смысле \prec_C в другие вершины типа \textcircled{H} при \textcircled{F} .

Рассмотрим связную компоненту графа \mathcal{G} . Из утверждения 4.10 следует, что она или гомеоморфна отрезку или окружности, поскольку все валентности ее вершин равны 1 или 2. Назовем *базой* связной компоненты эту компоненту, из которой удалили все хвосты. Список всех баз конечен. Соответствующие базам части ∂ показаны на рис. 11 и рис. 12.

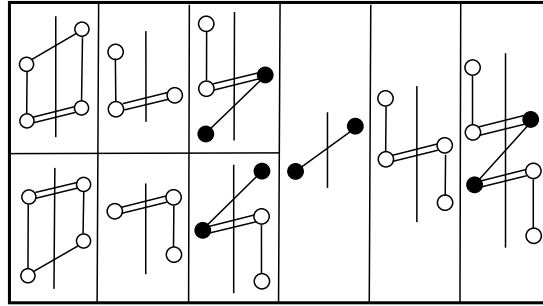


Рис. 11. Список баз без голов.

Базы без голов соответствуют прямым слагаемым M -дифференциала ∂ , которые эквивалентны (с точностью до действия диагональной подгруппы в $\text{Aut}_T(A, B)$ сопряжениями) слагаемым типа $L_0 \# R_2$, $L_2 \# R_0$, $L_1 \# \circ \mid$, $\circ \mid \# R_1$, $L_1 \# \textcircled{O} \# R_0$, $L_0 \# \textcircled{O} \# R_1$, $L_0 \# \textcircled{O} \# R_0$, $L_1 \# R_1$ и $L_1 \# \textcircled{O} \# R_1$ теоремы 2.3. Следовательно, каждая компонента \mathcal{G} гомотопически тривиальна.

Базы, содержащие головы, показаны на рис. 12. Они соответствуют прямым слагаемым M -дифференциала ∂ которые эквивалентны (с точностью до действия сопряжениями диагональной подгруппы в $\text{Aut}_T(A, B)$) слагаемым $L_0 \# R_l (l \geq 3)$, $L_k \# R_0 (k \geq 3)$, $L_k \# \circ \mid (k \geq 2)$, $\circ \mid \# R_l (l \geq 2)$, $L_k \# \textcircled{O} \# R_0 (k \geq 2)$, $L_0 \# \textcircled{O} \# R_l (l \geq 2)$, $L_k \# R_1 (k \geq 2)$, $L_1 \# R_l (l \geq 2)$, $L_1 \# \textcircled{O} \# R_1$, $L_k \# \textcircled{O} \# R_1 (k \geq 2)$, $L_1 \# \textcircled{O} \# R_l (l \geq 2)$, $L_k \# R_l (k, l \geq 2)$, $L_k \# \textcircled{O} \# R_l (k, l \geq 2)$ теоремы 2.3. Легко проверить, что мы получили в точности слагаемые из теоремы 2.3. Это завершает доказательство леммы 4.7 и теоремы 2.3. \square

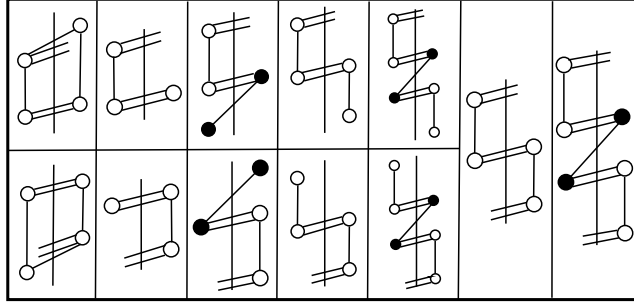


Рис. 12. Список всех баз с головами

5 Глифы. Лемма об M -модели.

Рассмотрим строгую функцию Морса F на компактном многообразии с краем. Она определяет тройку градуированных линейно упорядоченных множеств $A_F \supset B_F \supset C_F$ и, однозначно определяет единственный минимальный квазиэлементарный дифференциал, слабо эквивалентный дифференциалу какой-нибудь алгебраической модели функции F , разложенный в слагаемые теоремы 2.3. В этой главе мы покажем, что это разложение можно еще сильнее “упростить”.

5.1. M -модель для слагаемого теоремы 2.3. Рассмотрим одно из прямых слагаемых, перечисленных в теореме 2.3. Соответствующую градуированных линейно упорядоченных тройку множеств обозначим (A, B, C) . Соответствующий минимальный M -дифференциал обозначим ∂ , $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$. Видно, что гомологии $\partial = \partial_A$, ∂_B и $\partial_{A \setminus B}$ не более чем одномерны.

Лемма 5.1 *Существует единственный минимальный квазиэлементарный M -дифференциал $\delta \in \mathcal{D}_{A,B,C}$, разложенный в слагаемые теоремы такой 2.3, что выполняются следующие условия:*

- (1) $\delta_B = \partial_B$;
- (2) гомологии дифференциалов ∂ и δ ($\partial_{A \setminus B}$ и $\delta_{A \setminus B}$ соответственно) совпадают;
- (3) каждая δ_B -пара, оба элемента которой лежат в C , содержится в прямом слагаемом вида $\begin{array}{c} \circ \\ \parallel \\ \circ \end{array}$ (т.е. $\begin{array}{c} \circ \\ \parallel \\ \circ \end{array}$ содержится в прямом слагаемом $\begin{array}{c} \circ \\ \parallel \\ \circ \end{array}$ M -дифференциала δ);
- (4) гранично гомологически существенный элемент для ∂ (ес-

ли такой существует) содержится в прямом слагаемом $\mathbb{Z} \oplus M$ -дифференциала δ .

Всевозможные прямые слагаемые M -дифференциала δ перечислены в таблице рис. 13, где черным кружкам соответствуют гранично гомотологически существенные элементы. Мы называем эти прямые слагаемые глифами.

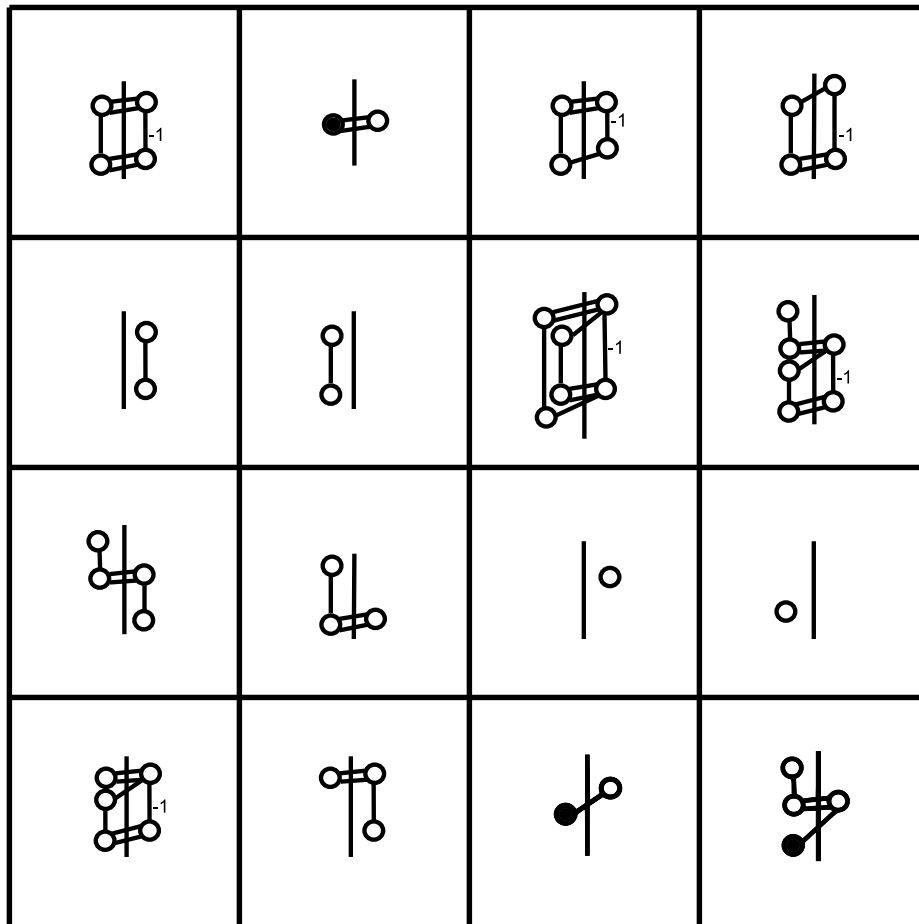













Рис. 13. Глифы.



Доказательство. Доказательство получается рассматриванием списка прямых слагаемых теоремы 2.3. Приведем его результат.



1). Для слагаемого вида  или  M -дифференциалы ∂ и δ совпадают.



2). Рассмотрим слагаемое $L_k \# R_l$ (k и l четные). В подслучае $l = 0$ с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с . В оставшихся случаях четное $l > 0$ и любое четное k – с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с .



3). Рассмотрим слагаемое $L_k \# R_l$ (k четно и l нечетно). В этом случае с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с .




4). Для слагаемого $L_k \# R_l$ (k нечетно и l четно) рассмотрим подслучаи: Если $k = 1, l = 0$, то M -дифференциал δ равен . В подслучае $k \geq 3, l = 0$ с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с .



Во всех оставшихся $l > 0$ с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с .

5). Для слагаемого $L_k \# R_l$ (k нечетно и l нечетно) с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с .

6). Для слагаемого $L_k \# \left| \circ \right.$ при нечетном k с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с .

7). Для слагаемого $L_k \# \left| \circ \right.$ при четном k с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с .

8). Для слагаемого $\circ \left| \# R_l \right.$ при четном l получаем: Если $l = 0$, то δ равен . Если $l > 0$, то с точностью до прямых слагаемых вида  M -дифференциал δ совпадает с .

9). Для слагаемого $\circ \left| \# R_l \right.$ при нечетном l M -дифференциал δ с точностью до прямых слагаемых вида  совпадает с .

10). Рассмотрим слагаемое $L_k \# \left| \circ \right. \# R_l$, k, l четные. При $l = 0$ M -

дифференциал δ с точностью до прямых слагаемых вида $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ равен $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$. При $l > 0$ M -дифференциал δ с точностью до прямых слагаемых вида $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ однозначно распадается в прямую сумму $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ и $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$.

11). Рассмотрим слагаемое $L_k \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \# R_l$, k четное, а l нечетное. В этом случае соответствующий M -дифференциал δ с точностью до прямых слагаемых вида $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ распадается в прямую сумму $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ и $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$.

12). Рассмотрим слагаемое $L_k \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \# R_l$, k нечетное, а l четное. Если $l = 0$, соответствующий M -дифференциал δ с точностью до прямых слагаемых вида $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ равен $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$. При $l > 0$ соответствующий M -дифференциал δ с точностью до прямых слагаемых вида $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ распадается

в прямую сумму $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ и $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$.

13). И, наконец, для слагаемого $L_k \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \# R_l$, k нечетного, и l нечетного, соответствующий M -дифференциал δ с точностью до прямых слагаемых вида $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ распадается в прямую сумму $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$ и $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$. \square

Для каждого минимального дифференциала применим лемму 5.1 к каждому прямому слагаемому минимального дифференциала, слабо эквивалентного ∂ .

Следствие 5.2 *Для $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ корректно определен M -дифференциал, разложенный в прямую сумму глифов леммы 5.1. Будем называть этот M -дифференциал M -моделью дифференциала ∂ и обозначать $\mathcal{P}(\partial)$. Дифференциалы, разложенные в прямую сумму глифов леммы 5.1 назовем тотально разложимыми.*

Таким образом, на пространстве $\mathcal{D}_{A,B,C}$ помимо обычной и слабой эквивалентности есть еще одна эквивалентность, самая слабая: скажем, что два дифференциала ∂_1 и ∂_2 \mathcal{P} -эквивалентны, если их M -модели совпадают $\mathcal{P}(\partial_1) = \mathcal{P}(\partial_2)$.

5.2. Замечания. Гранично гомологически существенные элементы у ∂ и δ совпадают. Нетрудно показать, что дифференциалы ∂ и δ сопряжены друг другу оператором неподвижным на $\mathbb{E}(B)$. Такое сопряжение не является, вообще говоря, $(A \setminus B)$ -верхнетреугольным.

5.3. *Примеры.* На рис. 5.3 изображены иммерсированные в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 диски и M -модели функции высоты. Заметим, что каждый глиф появляется в M -модели подходящей строгой функции Морса.

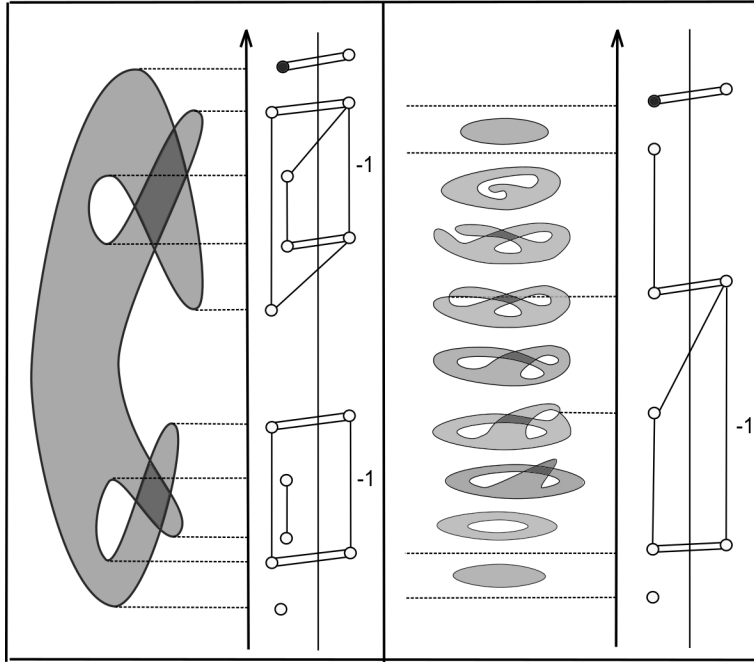


Рис. 14.

5.4. *Выражения для многочленов Пуанкаре и Морса.* Пусть $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$. Многочлены Пуанкаре $P(\mathcal{M}_{A,\partial})(t)$, $P(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})(t)$ и $P(\mathcal{M}_{B,\partial_B})(t)$ по определению есть многочлены Лорана $\sum_k \dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial})t^k$, $\sum_k \dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})t^k$ и $\sum_k \dim H_k(\mathcal{M}_{B,\partial_B})t^k$ соответственно. Гомологии вычисляются с коэффициентами в \mathbb{E} .

Многочлен Морса $P(F)$ функции Морса F это производящая функция множества критических точек функции F . Определим *многочлен Морса дифференциала* $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ как

$$P_M(\partial)(t) = \sum_{a \in A \setminus (B \cup C_+)} t^{\deg(a)}.$$

Многочлен Морса алгебраической модели функции F равен ее многочлену Морса.

Назовем индексом глифа наименьшую степень элементов его базиса. Для дифференциала $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ обозначим через $\#$ число глифов данного типа и индекса в M -модели ∂ . В этих обозначениях получаем следующие выражения для многочленов Пуанкаре и Морса.

Предложение 5.3

$$P(\mathcal{M}_{A,\partial})(t) = \sum_k \left(\# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} | \\ \circ \end{array} + \# \begin{array}{c} | \\ \circ \end{array} + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_k \right) t^k,$$


$$P(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})(t) = \sum_k \left(\# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} | \\ \circ \end{array} \circ_k \right) t^k,$$


$$P(\mathcal{M}_{B,\partial_B})(t) = \sum_k \left(\# \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \circ_k + \# \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \circ_k + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \circ_k + \# \begin{array}{c} | \\ \circ \end{array} \circ_k + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_k \right) t^k,$$


$$\begin{aligned} P_M(\partial)(t) &= \\ &= \sum_k \left(\# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_k + \# \begin{array}{c} | \\ \circ \end{array} \circ_k + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_k + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-1} + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ_{k-2} \right) t^k \\ &\quad + \sum_k \left(\# \begin{array}{c} | \\ \circ \end{array} \right) t^k (1+t). \end{aligned}$$

6 Граф и раскраски. Допустимые многочлены.

Рассмотрим конечное градуированное линейно упорядоченное множество $B = \{b_1 < \dots < b_K\}$ (градуировка это функция $\deg: B \rightarrow \mathbb{Z}$). Мы предположим, что B разложено в непересекающиеся одноэлементные и двуэлементные подмножества. Элементы b_i и b_j ($i > j$) могут образовывать двуэлементное подмножество, только если и $\deg(b_i) = \deg(b_j) + 1$. Пусть также заданы подмножества $C \subset B$ и подмножество $H \subset B$, состоящее из элементов одноэлементных подмножеств. Любой M -дифференциал $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ порождает такую комбинаторную

(2) Вершина (b_i, b_j) соединена ребром с (b_l, b_m) , $l > m$ типа V_{k+1} , если и только если $i < l, m < j$. Геометрически, это означает, что пары (b_i, b_j) и (b_l, b_m) могут быть частью глифа  (пара (b_i, b_j) – внутренняя ∂_B -пара).

(3) Вершина (b_i, b_j) соединена ребром с вершиной b_l of the type $C_{k+1} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$ если и только если $i < l$. Геометрически, это означает, что (b_i, b_j) и вершина b_l могут быть частью глифа .

(4) Вершина (b_i, b_j) соединена ребром с вершиной b_l of the type $D_{k+1} = \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$ если и только если $l < j$. Геометрически, это означает, что (b_i, b_j) и вершина b_l могут быть частью глифа .

(5) Вершина (b_i, b_j) соединена ребром с каждой вершиной типа E_{k+1} . Конструкция графа Γ закончена.

Для дифференциала $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ определим $\Gamma(\partial)$ как $\Gamma = \Gamma(B, C, H, (d_k)_{k \in \mathbb{Z}})$, где d_k размерность ядра связывающего гомоморфизма $H_k(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{M}_{B,\partial_B})$ из длинной точной последовательности пары $(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})$. Напомним, что для функции F множество V_F и C_F определены однозначно, но разбиение V_F на пары и одиночные элементы, а также H (множество гранично гомологически существенных элементов) зависит от поля \mathbb{E} .

6.3. Раскраски графа Γ . Допустимые многочлены. Рассмотрим граф $\Gamma = \Gamma(B, C, H, (d_k)_{k \in \mathbb{Z}})$. Паросочетанием графа называется набор ребер без общих вершин. Для паросочетания Σ обозначим через V_Σ множество всех вершин Γ , не являющихся концами ребер из Σ . Мы назовем отображение $s: V_\Sigma \rightarrow \{0, 2\}$ допустимым отображением, если при любом k и любой вершине v типа V_k, C_k, D_k или E_k выполняется $s(v) = 0$. Раскраска графа Γ это пара (Σ, s) , состоящая из паросочетания и допустимого отображения.

Сопоставим раскраске (Σ, s) графа Γ многочлен $P_{\Sigma,s}$ по следующему правилу. Вершине $v \in V_\Sigma$ мы сопоставим моном $t^{k(v)+s(v)}$. Определим многочлен $P_{\Sigma,s}$ как сумму всех этих мономов по V_Σ если $V_\Sigma \neq \emptyset$, если $V_\Sigma = \emptyset$ то определим $P_{\Sigma,s}$ как нулевой многочлен. Назовем такие многочлены допустимыми многочленами. Множество, состоящее из всех допустимых многочленов, мы обозначим через $\mathcal{P}_{\text{Adm}}(B, C, H, (d_k)_{k \in \mathbb{Z}})$. Для графа $\Gamma = \Gamma(\partial)$ мы будем обозначать множество допустимых многочле-

нов через $\mathcal{P}_{\text{Adm}}(\partial)$. Множество всех раскрасок графа Γ , очевидно, конечно и, следовательно, множество допустимых многочленов конечно.

6.4. Изоморфизм между графами. Рассмотрим две тройки $A \supset B \supset C$ and $A' \supset B \supset C$ конечных линейно упорядоченных множеств. Мы предполагаем, что порядки и градуировки на B индуцированные из A и A' совпадают. Пусть $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$, $\partial' \in \mathcal{D}_{A',B,C}$.

Лемма 6.1 *Допустим ∂_B эквивалентен ∂'_B , $H(\partial) = H(\partial')$ и $H_*(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B}) \approx H_*(\mathcal{M}_{A',\partial'}, \mathcal{M}_{B,\partial'_B})$, $H_*(\mathcal{M}_{A,\partial}) \approx H_*(\mathcal{M}_{A',\partial'})$. Тогда существует сохраняющий тип вершин изоморфизм $\Gamma(\partial) \rightarrow \Gamma(\partial')$.*

Доказательство. В самом деле, граф $\Gamma(\partial)$ построен из множества C , ∂_B -пар, множества $H(\partial)$ и чисел d_k . Поскольку $\partial_B \sim \partial'_B$, то размерности соответственных относительных гомологий у ∂_B и ∂'_B совпадают. Этими размерностями определяются пары по лемме 3.2. Следовательно, достаточно показать, что числа d_k зависят только от $H_*(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})$, $H_*(\mathcal{M}_{A,\partial})$ и $H_*(\mathcal{M}_{B,\partial_B})$.

Рассмотрим многочлены Пуанкаре (вообще говоря это многочлены Лорана, могут быть и отрицательные степени) $P(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})$, $P(\mathcal{M}_{A,\partial})$ и $P(\mathcal{M}_{B,\partial})$ которые равны $\sum \dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})t^k$, $\sum \dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial})t^k$ и $\sum \dim H_k(\mathcal{M}_{B,\partial_B})t^k$ соответственно.

Обозначим через i_{k-1} размерность образа отображения

$$H_k(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{M}_{B,\partial_B})$$

из длинной точной последовательности пары $(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})$. Рассмотрим многочлены Лорана D, I определенные так: $D(t) = \sum d_k t^k$, $I(t) = \sum i_k t^k$. Лемма 6.1 следует из следующей леммы.

Лемма 6.2 *Многочлены Лорана I и D удовлетворяют равенствам:*

$$P(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})(t) = D(t) + \frac{1}{t}I(t),$$

$$P(\mathcal{M}_{B,\partial})(t) + P(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})(t) = P(\mathcal{M}_{A,\partial})(t) + I(t)(1+t).$$

Доказательство. В самом деле, $\dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B}) = d_k + i_{k-1}$. Это эквивалентно первому равенству. Через l_k обозначим ранг отображения

$$H_k(\mathcal{M}_{B,\partial_B}) \rightarrow H_k(\mathcal{M}_{A,\partial})$$

из длинной точной последовательности пары $(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B})$. Из точности этой последовательности вытекает, что $\dim H_k(\mathcal{M}_{B,\partial_B}) = i_k + l_k$, $\dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial}) = l_k + d_k$. Следовательно,

$$\dim H_k(\mathcal{M}_{B,\partial_B}) + \dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B}) = \dim H_k(\mathcal{M}_{A,\partial}) + i_k + i_{k-1},$$

что эквивалентно второму равенству. \square

Следующая лемма есть очевидное следствие леммы 6.1.

Лемма 6.3 *Если дифференциалы ∂, ∂' удовлетворяют предположения предположения 6.1, то $\mathcal{P}_{\text{Adm}}(\partial) = \mathcal{P}_{\text{Adm}}(\partial')$.* \square

6.5. Конструкция раскрасок из M -дифференциалов. Мы построим раскраску графа $\Gamma(\partial)$ по дифференциалу ∂ . Рассмотрим M -модель $\mathcal{P}(\partial)$ M -дифференциала ∂ полученного в следствии 5.2. Напомним, что мы помечаем каждый глиф наименьшей степенью элементов его базиса. Мы определим отображение Ψ из множества вершин $\Gamma(\partial)$ в множество глифов из $\mathcal{P}(\partial)$ следующим образом:


Каждая вершина типа $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ или $\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ естественно соответствует одному или двум элементам из множества B . Этот элемент или пара элементов есть часть базиса одного глифа из $\mathcal{P}(\partial)$. Пусть Ψ отображает каждую вершину типа $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ или $\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ в этот глиф. Таким образом, Ψ определено на всех вершинах типа A_k, B_k, C_k и D_k . Теперь мы определим Ψ на вершинах типа E_k .

Число d_k из определения графа $\Gamma(\partial)$ равно числу всех глифов типов $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_{k-1}$ и $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ в $\mathcal{P}(\partial)$. Обозначим через N_k множество всех глифов типов $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_{k-1}$ и $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ в $\mathcal{P}(\partial)$. Зафиксируем произвольную биекцию $\psi_k : E_k \rightarrow N_k$. Пусть Ψ совпадает с ψ_k на E_k . Конструкция отображения Ψ закончена.

Глифы типов $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ и $\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ из $\mathcal{P}(\partial)$ не принадлежат образу Ψ .

Каждый глиф типа $\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ и $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ есть образ одной вершины


из $\Gamma(\partial)$. Каждый глиф типов $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$, $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ и $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}_k$ есть образ двух вершин. Определим набор $\Sigma(\partial)$ ребер $\Gamma(\partial)$ условием: ребро принадлежит $\Sigma(\partial)$ если и только если образы его концов под действием Ψ совпадают.

Теперь определим $s(\partial): V_\Sigma \rightarrow \{0, 2\}$ так что множество $s^{-1}(2)$ есть прообраз при Ψ множества всех глифов типа . Очевидно, $(\Sigma(\partial), s(\partial))$ является раскраской графа $\Gamma(\partial)$.















Раскраска $(\Sigma(\partial), s(\partial))$ зависит от выбора биекций ψ_k . Многочлен $P_{\Sigma(\partial), s(\partial)} = P(\partial)$ не зависит от этого произвола.








6.6. Любая раскраска индуцирована подходящим M -дифференциалом. M -дифференциал $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$ порождает граф $\Gamma(\partial)$ и раскраску этого графа $(\Sigma(\partial), s(\partial))$. Рассмотрим (другую) раскраску (Σ, s) графа $\Gamma(\partial)$.

Лемма 6.4 *Существует конечное линейно упорядоченное множество A' содержащее B (порядок и градуировка индуцированные из A' на B совпадают с порядком и градуировкой индуцированными из A) и дифференциал $\partial' \in \mathcal{D}_{A',B,C}$ такой что*

1. $\partial_B \sim \partial'_B$, $H(\partial) = H(\partial')$, $H_*(\mathcal{M}_{A,\partial}) \approx H_*(\mathcal{M}_{A,\partial'})$, $H_*(\mathcal{M}_{A,\partial}, \mathcal{M}_{B,\partial_B}) \approx H_*(\mathcal{M}_{A',\partial'}, \mathcal{M}_{B,\partial'_B})$;
2. M -модель ∂' не содержит глифов ;
3. $(\Sigma, s) = (\Sigma(\partial'), s(\partial'))$ после подходящего изоморфизма леммы 6.1.

Доказательство. Рассмотрим случай пустого паросочетания Σ и нулевого допустимого отображения s . Будем полагать, что ∂ тотально разложим. Чтобы построить ∂' мы изменим глифы в ∂ следующим образом. Ребра в $\Sigma(\partial)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с глифами

типов , , ,  и . Мы заменим, не обращая внимания на взаимное расположение в прямой сумме, каждый из этих глифов на два глифа:  на  и ,  на  и ,  на  и 

на  и , заменим глиф  на два глифа  соседней градуировки. Вершины из множества $s(\partial)^{-1}(2)$ находятся во взаимно однозначном отображении с глифами типа . Мы заменим, не обращая внимания на взаимное расположение в прямой сумме, каждый из этих глифов на . И наконец, уберем все глифы типа . Отметим, что эта операция

над ∂ не единственна, поскольку порядок на A' не однозначно определен вообще говоря. Однако граф, получающийся из ∂_\emptyset , и пустая раскраска с нулевым допустимым отображением, очевидно не зависят от этого произвола.

Чтобы получить дифференциал по произвольной раскраске мы изменим некоторые глифы в ∂_\emptyset по очевидному “обратному” правилу к описанному. Очевидно, эта операция не меняет граф и гомологические свойства дифференциала. \square

6.7. Конструкция множества $\mathcal{P}_\mathbb{E}(f, M)$. Мы построим множество $\mathcal{P}_\mathbb{E}(f, M)$ опираясь только на топологические данные п. 0.7. Продолжим в обозначениях п. 0.7.

Пусть f строгоморсовский росток вдоль границы ∂M компактного многообразия M .

Рассмотрим конечное градуированное множество критических значений $B_f = \{c_1 < \dots < c_N\}$ функции $g = f|_{\partial M}$, градуировка это отображение в \mathbb{Z} , $c_i \mapsto \deg(c_i)$, где $\deg(c_i)$ есть индекс Морса g в соответствующей критической точке. Обозначим через $C_f \subset B_f$ множество значений g at внешних критических точках f . Эта часть конструкции зависит только от части (2) топологических данных.

Обозначим через ∂M^a множество меньших значений $\{x \in \partial M | g(x) \leq a\}$. Скажем, что два критических значения $c_i < c_j$ функции g образуют пару если

$$\begin{aligned} \dim H_*(\partial M^{a_{j+1}}, \partial M^{a_i}; \mathbb{E}) &= \dim H_*(\partial M^{a_{j+1}}, \partial M^{a_{i+1}}; \mathbb{E}) - 1 = \\ &= \dim H_*(\partial M^{a_j}, \partial M^{a_{i+1}}; \mathbb{E}) = \dim H_*(\partial M^{a_j}, \partial M^{a_i}; \mathbb{E}) - 1. \end{aligned}$$

Можно показать, что любое критическое значение функции g участвует не более, чем в одной паре, и если (c_i, c_j) ($i < j$) такая пара, то $\deg(c_j) = \deg(c_i) + 1$. Поэтому B_f разложено в непересекающиеся пары и отдельные элементы. Это разложение использует только часть (3) топологических данных.

Мы определим $H_f \subset B_f$ как множество всех гранично гомологически существенных критических значений функции g (определение в п. 1.10). Определение гранично гомологически существенных критических значений требует только часть (4) топологических данных. Можно показать, что множество H_f гранично гомологически существенных критических значений есть подмножество множества отдельных элементов в B_f .

Определим число d_k как размерность ядра связывающего гомоморфизма

$$H_k(M, \partial M; \mathbb{E}) \rightarrow H_{k-1}(\partial M; \mathbb{E}).$$

Рассмотрим граф $\Gamma(B_f, C_f, H_f, (d_k)_{k \in \mathbb{Z}})$, построенный в п. 6.1, 6.2. Скажем, что граф $\Gamma_{\mathbb{E}}(f, M)$ это $\Gamma(B_f, G_f, H_f, (d_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ и, наконец, $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ из теоремы 0.1 есть $\mathcal{P}_{\text{Adm}}(B_f, C_f, H_f, (d_k)_{k \in \mathbb{Z}})$, которое определено в п. 6.3.

6.8. Примеры. Рассмотрим росток f вдоль границы отрезка M из п. 0.5. Соответствующий граф $\Gamma_{\mathbb{E}}(f, M)$ имеет две вершины: вершину типа $C_0 = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array}$ и вершину типа $D_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array}$. Следовательно у графа $\Gamma_{\mathbb{E}}(f, M)$ нет ребер и $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M) = \{1 + t\}$. Для замкнутого многообразия M у графа $\Gamma_{\mathbb{E}}(f, M)$ нет вершин типов A, B, C и D, число вершин типа E_k равно $b_k^{\mathbb{E}}(M)$. Поэтому $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ состоит из одного многочлена, многочлена Пуанкаре M .

7 Доказательство обобщенных неравенств Морса.

Неравенства Морса теорем 0.1, 0.2 вытекают из следующих рассмотрений примененных к алгебраической модели строгой функции Морса.

7.1. Разложение многочлена Морса. Доказательство теорем 0.1 и 0.2. Рассмотрим M -пару с дифференциалом $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$. Эта M -пара определяет граф $\Gamma(\partial)$, раскраску $(\Sigma(\partial), s(\partial))$ и допустимый многочлен $P(\partial) = P_{\Sigma(\partial), s(\partial)}$. Из определений непосредственно вытекает, что в терминах M -модели $\mathcal{P}(\partial)$ многочлен $P(\partial)$ равен:

$$\sum_k \left(\# \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \# \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \# \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} + \# \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} + \# \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \# \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \right) t^k.$$

Сопоставляя это выражение с выражением для многочлена Морса $P_M(\partial)(t)$ из предложения 5.3 мы получаем следующую теорему.

Теорема 7.1 *Многочлен Морса $P_M(\partial)(t)$ канонически раскладывается в сумму допустимого многочлена $P(\partial)$ и многочлена $(1 + t)K(\partial)(t)$, такого что все коэффициенты $K(\partial)$ неотрицательные целые числа. Более*

того,

$$K(\partial)(t) = \sum_k \left(\# \left| \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ_k \end{array} \right. \right) t^k.$$

□

Для дифференциала алгебраической модели строгой функции Морса это и есть утверждение теоремы 0.1, что и является ее доказательством. Из теоремы 0.1 мгновенно вытекает утверждение теоремы 0.2 для строгоморсовских продолжений. Морсовское продолжение небольшим шевелением получается из строгоморсовского, что заканчивает доказательство теоремы 0.2.

7.2. Определение множеств $\text{Top}_{\mathbb{E}}(F)$ и $\text{Add}_{\mathbb{E}}(F)$. У алгебраической модели строгой функции Морса F есть M -модель. Каждая критическая точка функции F входит в какой-нибудь глиф этой M -модели. Мы определяем $\text{Add}_{\mathbb{E}}(F)$ как критические точки входящие в глифы $\left| \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} \right.$, а множество $\text{Top}_{\mathbb{E}}(F)$ как дополнение до $\text{Add}_{\mathbb{E}}(F)$ в $\text{Crit}(F)$.

7.3. Еще о слабых неравенствах Морса. Обобщенные неравенства Морса можно ослаблять разными способами и в разных терминах. Приведем один из них.

Рассмотрим M -дифференциал $\partial \in \mathcal{D}_{A,B,C}$. Обозначим число вершин графа Γ через $v(\Gamma)$ и через $m(\Gamma)$ обозначим удвоенное максимальное число ребер в паросочетаниях Γ (максимальное число концов ребер в паросочетаниях).

Лемма 7.2 *Число элементов $A \setminus (B \cup C_+)$ не меньше*

$$v(\Gamma(\partial)) - m(\Gamma(\partial)) = \min_{P \in \mathcal{P}_{\text{Adm}}(\partial)} P(1).$$

Число элементов степени k в $A \setminus (B \cup C_+)$ не меньше, чем

$$\#B_k + \#C_k + \#D_k + \#E_k - \#A_{k-1},$$

где $\#$ обозначает число соответствующих вершин в графе $\Gamma(\partial)$.

Неравенства этой леммы превращаются в классические слабые неравенства Морса $\sum m_i(F) \geq \sum b_i^{\mathbb{E}}(M)$, $m_i(F) \geq b_i^{\mathbb{E}}(M)$ в случае замкнутого многообразия.

Доказательство. В самом деле, число $\#A \setminus (B \cup C_+)$ равно $P(\partial)(1) + (1+t)K(\partial)(t)|_{t=1}$ по теореме 7.1. Число $P(\partial)(1)$ равно числу элементов множества $V_{\Sigma(\partial)} \subset \#A \setminus (B \cup C_+)$ (см. п. 6.3), где $\Sigma(\partial)$ паросочетание, построенное в п. 6.5. По определению $\#V_{\Sigma(\partial)} = v(\Gamma(\partial, G)) - 2\#\Sigma(\partial)$. Первое утверждение леммы вытекает теперь из того, что число $(1+t)K(\partial)(t)|_{t=1}$ неотрицательно.

Число элементов степени k в $A \setminus (B \cup C_+)$ не меньше коэффициента при t^k в $P(\partial)$ по теореме 7.1. Этот коэффициент, по определению $P(\partial)$ равен числу вершин из $V_{\Sigma(\partial)}$ на которых $s(\partial)$ принимает значение k . Допустимое отображение $s(\partial)$ принимает значение k на каждой вершине типа B_k, C_k, D_k или E_k из V_{Σ} по определению. Число ребер, имеющих конец в объединении вершин типов B_k, C_k, D_k и E_k , в любом паросочетании не больше $\#A_{k-1}$, поскольку все эти ребра начинаются в вершинах из A_{k-1} . Это доказывает второе утверждение. \square

7.4. Доказательство теоремы 0.3. По теореме 0.1 мы получаем разложение многочлена Морса $P(F)$, $P(F)(t) = Q(t) + k(t)(1+t)$, где многочлен Q лежит в $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$. По этой же теореме есть разложение $P(-F)(t) = R(t) + l(t)(1+t)$ для некоторого $R \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(-f, M)$. Следовательно, в силу того, что $P(F) = \text{Op}_n(P(-F))$ ($n = \dim M$) и того, что операция Op_n переводит многочлены, делящиеся на $1+t$, в себя, получаем разложение $P(F)(t) = \text{Op}_n(R)(t) + m(t)(1+t)$, где многочлен m имеет целые неотрицательные коэффициенты и его степень не больше $n-1$.

Рассмотрим отображение D_n , переводящее многочлен $b_0 + b_1 t^n + \dots + b_n t^n$ в набор чисел $(b_0, b_1 - b_0, b_2 - b_1 + b_0, \dots, b_n - b_{n-1} + \dots \pm b_0)$ (правых частей неравенств Морса). Через \max обозначим функцию от двух наборов чисел одинаковой длины, равную набору из покоординатных максимумов.

Определим $M_n(Q, P)$ как $D_n^{-1}(\max(D_n(Q), D_n(P)))$. Теорема 0.3 вытекает из следующей простой леммы, геометрический смысл которой в том, что пересечение двух сдвинутых октантов в \mathbb{Z}^n есть сдвинутый октант:

Лемма 7.3 *Многочлен A с целыми неотрицательными коэффициентами допускает разложения $Q(t) + k(t)(1+t)$ и $P(t) + m(t)(1+t)$ если и только если он допускает разложение вида $M_n(Q, P)(t) + n(t)(1+t)$. Коэффициенты всех многочленов целые неотрицательные, степени Q и P не больше n , степени k, m, n не больше $n-1$.* \square

7.5. *Вариант ответа на вопрос Арнольда.* Следующая оценка в вопросе Арнольда не использует теоремы 2.3 или следствия 5.2.

Пусть $F: M^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ строгая функция Морса. Эта функция однозначно определяет конечные градуированные множества $A_F \supset B_F \supset C_F$ (см п. 1.9). Градуировка каждого элемента B_F лежит в $\{0, \dots, n\}$, а каждого элемента A_F лежит в $\{0, \dots, n+1\}$. Функция F также определяет (вообще говоря, неоднозначно) квазиэлементарный (см. п.3.6) дифференциал $\partial \in \mathcal{D}_{A_F, B_F, C_F}$. Множество ненулевых элементов его матрицы должно удовлетворять условиям леммы 4.3. Это множество однозначно определяет гомологии самого дифференциала $\partial = \partial_{A_F}$, дифференциалов $\partial = \partial_{B_F}$ и $\partial = \partial_{A_F \setminus B_F}$, инъекцию h_+ и, в частности, множество гранично гомологически существенных элементов каждой степени. Следовательно, для тройки $A \supset B \supset C$ конечных градуированных множеств, есть только конечное множество квазиэлементарных дифференциалов ∂ пары (A, B) у которых C состоит из ∂ -тривиальных элементов с точностью до отношения подобия (см. п. 4.2).

По росту f вдоль края вдоль ∂M составим множество критических значений $B_f = \text{Crit}(f|_{\partial M})$, градуированное индексом Морса, и разбитое на пары и отдельные элементы (пары и гомологически существенные элементы для элементарного дифференциала ∂_{B_f} , соответствующего $f|_{\partial M}$). В множестве гомологически существенных элементов есть выделенное подмножество граничных гомологически существенных критических значений H_f . Кроме того, есть множество $C_f \subset B_f$ внешних критических значений.

Конечным перебором (при данном множестве A) можно проверить, есть ли в пространстве $\mathcal{D}_{A, B_f, C_f}$ квазиэлементарный дифференциал ∂ , такой что

1. его гомологии и гомологии $\partial_{A \setminus B_f}$ равны гомологиям M и ∂M соответственно;
2. его ограничение на $\mathbb{E}(B_f)$ равно ∂_{B_f} ;
3. элементы множества C_f ∂ -тривиальны;
4. его гранично гомологические элементы совпадают с H_f .

Назовем множество A , такое что такой квазиэлементарный дифференциал существует *f -подчиненным*. Конечные градуированные линейно упорядоченные множества данной мощности содержащие B_f , при условии,

что градуировка каждого элемента $\{0, \dots, n+1\}$ образуют конечное подмножество. Поэтому конечным перебором можно найти f -подчиненное множество A наименьшей мощности. Оценкой в вопросе Арнольда будет, очевидно, число

$$\#A - \#B_f - \#C_f.$$

У функции $-F$ множество B_{-F} связано с множеством B_f обращением порядка и изменением градуировки: критическая точка i для $f|_{\partial M}$ является критической точкой $n-i$ для $-f|_{\partial M}$, внешняя точка для $f|_{\partial M}$ является внутренней для $-f|_{\partial M}$ и наоборот. Совершенно ясно как связано множество A_{-F} и множества A_f , обозначим соответствующую операцию над множествами через $-_{n+1}$, $A_{-F} = -_{n+1}(A_f)$. Конечным перебором можно найти множество A^\pm являющееся f -подчиненным, такое что множество $-_{n+1}(A^\pm)$ является $-f$ -подчиненным. Оценкой в вопросе Арнольда будет, очевидно, число

$$\#A^\pm - \#B_f - \#C_f.$$

Заметим, что в M -модели квазиэлементарного дифференциала $\partial^\pm \in \mathcal{D}_{A^\pm, B_f, C_f}$ могут содержаться глифы типа $\left| \begin{smallmatrix} \circ \\ \circ \end{smallmatrix} \right|$, тогда как в M -модели квазиэлементарного дифференциала $\partial \in \mathcal{D}_{A, B_f, C_f}$ их нет.

8 Пример. Классические и обобщенные неравенства Морса. Пример Арнольда.

В этой главе мы рассмотрим примеры неравенств Морса, включая пример Арнольда, и обсудим взаимоотношения наших результатов с классическими.

8.1. Пример. Рассмотрим пример из п. 0.9. В этом примере многообразии M гомотопически эквивалентно проективному пространству $\mathbb{R}P^{2n-1}$, его рациональные гомологии такие же как у сферы S^{2n-1} . Граница ∂M это сфера S^{2n-1} . Рациональные относительные гомологии пары $(M, \partial M)$ равны нулю. У ограничения ростка f на край все критические точки внешние. Две из них – максимум и минимум – гомологически существенные, остальные $2n$ критических точек разбиты на пары. Классические неравенства Морса гарантируют в этом случае две критические

точки. В этом случае у графа $\Gamma_{\mathbb{Q}}(f, M)$ две вершины – одна вершина типа \mathcal{A}_0 и вторая вершина типа \mathcal{A}_{2n-1} , ребер нет. Таким образом, $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}(f, M) = \{1 + t^{2n-1}\}$. Поэтому теорема 0.2 оценивает снизу число критических точек у продолжения f тоже двойкой. Рассмотрим теперь противоположный росток $-f$. У его ограничения на край все критические точки внутренние. Классические неравенства Морса не гарантируют в этом случае ни одной критической точки. Граф $\Gamma_{\mathbb{Q}}(-f, M)$ в этом случае пуст. Множество $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}(-f, M) = \{0\}$. Следовательно в этом случае неравенство теоремы 0.2, как и классическое неравенство Морса не гарантирует ни одной критической точки у продолжения внутрь. Множество же $\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}(f, M)$ состоит из многочлена $1 + t + t^2 + \dots + t^{2n-1}$ и неравенство следствия 0.4 оценивает снизу число критических точек морсовского продолжения ростка f числом $2n$.

Этот пример связан со следующим. Пусть связное замкнутое непустое многообразие M ($\partial M = \emptyset$) является \mathbb{Q} -гомологической точкой ($H_i(M; \mathbb{Q}) = 0$ при всех $i > 0$) и $\dim M = 2n$. Такое многообразие существует, например $M = \mathbb{R}P^{2n}$. Тогда теорема 0.2 гарантирует только одну критическую точку, а следствие 0.4 гарантирует $2n + 1$ точку.

Последний пример связан с теоремой Такенса и Вайта [23], утверждающей что функция Морса на гомологической сфере S^n , имеющая четное число точек любого индекса, имеет их не меньше $2n + 2$.

8.2. Классические и обобщенные неравенства Морса. Зафиксируем строгоморсовский росток f вдоль границы ∂M компактного многообразия M . Мы покажем, что для любого многочлена $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, M)$ существует многочлен Q с неотрицательными целыми коэффициентами, что $P(t) = P_{\mathbb{E}}(M)(t) - P_{-}(f, M)(t) + (1 + t)Q(t)$.

Многочлен P , по определению, порожден раскраской (Σ, s) графа $\Gamma_{\mathbb{E}}(f, M)$, $P = P_{\Sigma, s}$. Граф $\Gamma_{\mathbb{E}}(f, M)$ естественно изоморфен графу $\Gamma(\partial)$, где ∂ дифференциал алгебраической модели $\mathcal{M}_{A_F, B_F, \partial}$ строгой функции Морса F , продолжающей f .

По примененной к ∂ лемме 6.4 найдется линейно упорядоченное множество A' содержащее B_f и M -дифференциал $\delta \in \mathcal{D}_{A', B_f, C_f}$, так что (Σ, s) является раскраской, порождающей δ см. п. 6.5) и гомологии δ совпадают с гомологиями M . Мы предполагаем, что δ тотально разложим и используем его глифы для вычисления многочленов $P_{\mathbb{E}}(M)(t) - P_{-}(f, M)(t)$ и P . Многочлен $P_{\mathbb{E}}(M)(t) - P_{-}(f, M)(t)$ равен

$$\begin{aligned}
& \sum_k \left(\# \text{diagram}_1 + \# \text{diagram}_2 + \# \text{diagram}_3 + \# \text{diagram}_4 + \# \text{diagram}_5 \right) t^k - \\
& - \left(\sum_k \left(\# \text{diagram}_6 + \# \text{diagram}_7 + \# \text{diagram}_8 + \# \text{diagram}_9 + \# \text{diagram}_{10} + \# \text{diagram}_{11} + \# \text{diagram}_{12} \right) t^k + \right. \\
& \left. + \# \text{diagram}_{13} \right) t^k + \sum_k \left(\# \text{diagram}_{14} + \# \text{diagram}_{15} + \# \text{diagram}_{16} + \# \text{diagram}_{17} \right) t^k (1+t) = \\
& = \sum_k \left(\# \text{diagram}_{18} + \# \text{diagram}_{19} - \# \text{diagram}_{20} - \# \text{diagram}_{21} - \# \text{diagram}_{22} - \# \text{diagram}_{23} \right) t^k - \\
& - \sum_k \left(\# \text{diagram}_{24} + \# \text{diagram}_{25} + \# \text{diagram}_{26} + \# \text{diagram}_{27} \right) t^k (1+t),
\end{aligned}$$

тогда как P равен

$$\sum_k \left(\# \text{diagram}_{28} + \# \text{diagram}_{29} + \# \text{diagram}_{30} + \# \text{diagram}_{31} + \# \text{diagram}_{32} + \# \text{diagram}_{33} \right) t^k.$$

Разность $P - (P_{\mathbb{E}}(M) - P_-(F, \partial M))$ равна, очевидно:

$$\begin{aligned}
& \sum_k \left(\# \text{diagram}_{34} + \# \text{diagram}_{35} + \# \text{diagram}_{36} + \# \text{diagram}_{37} \right) (t^k + t^{k+1}) + \\
& + \sum_k \left(\# \text{diagram}_{38} + \# \text{diagram}_{39} + \# \text{diagram}_{40} + \# \text{diagram}_{41} \right) t^k (1+t).
\end{aligned}$$

Поэтому обобщенные неравенства Морса теоремы 0.1 не слабее классических неравенств Морса.

Рассмотрим теперь классические слабые неравенства Морса $m_k(F) \geq b_k^{\mathbb{E}}(M) - m_k^{\partial}(f, M)$ и неравенства леммы 7.2. Пусть δ тотально разложимый M -дифференциал, вычисляющий гомологии M и порождающий раскраску графа $\Gamma_{\mathbb{E}}(f, M)$ с пустым паросочетанием и нулевым допустимым отображением. Такой дифференциал был построен в доказательстве леммы 6.4. По построению у δ нет глифов типов

$$\begin{aligned}
& \text{diagram}_{42}, \text{diagram}_{43}, \text{diagram}_{44}, \text{diagram}_{45}, \\
& \text{diagram}_{46} \text{ и } \text{diagram}_{47}.
\end{aligned}$$

В терминах глифов дифференциала δ :

$$\begin{aligned}
b_k^{\mathbb{E}}(M) &= \# \circ \Big|_k + \# \Big|_k^{\circ} + \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k, \\
m_k^{\partial}(f, M) &= \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k + \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_{k-1} + \# \Big|_k^{\circ} + \# \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k + \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k^{\circ} + \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_{k-1}, \\
\#B_k &= \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k = \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k^{\circ}, \quad \#C_k = \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k = \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k^{\circ}, \\
\#D_k &= \# \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k = \# \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k^{\circ}, \quad \#E_k = \# \Big|_k^{\circ}, \quad \#A_{k-1} = \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_{k-1} = \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_{k-1}^{\circ}.
\end{aligned}$$

Следовательно, разность

$$\#B_k + \#C_k + \#D_k + \#E_k - \#A_{k-1} - (b_k^{\mathbb{E}}(M) - m_k^{\partial}(f, \partial M))$$

равна

$$2\# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k^{\circ} + 2\# \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k^{\circ} + \# \Big|_k^{\circ} + \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_k + \# \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \Big|_{k-1},$$

и потому неотрицательна. Это доказывает, что неравенства леммы 7.2 не слабее классических слабых неравенств Морса.

8.3. Пример Арнольда. Утверждение следующей теоремы говорит, что неравенства теоремы 0.1 дают хорошие результаты в случае примера Арнольда (п. 0.1).

Теорема 8.1 Пусть M^{n+1} ($n > 0$) замкнутое многообразие, F строгая функция Морса на M^{n+1} , содержащая все свои критические точки в вложенном замкнутом шаре $B^{n+1} \subset M^{n+1}$. Пусть росток F вдоль $\partial B^{n+1} = S^n$ строгоморсовский.

Для любого $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(f, B^{n+1})$ найдется многочлен Q с неотрицательными коэффициентами, такой что

$$P(t) = P_{\mathbb{E}}(M) + (1+t)Q(t).$$

Доказательство. Обозначим через M_1 многообразие с краем $(M^{n+1} \setminus B^{n+1}) \cup S^n$, через \tilde{F} обозначим ограничение $F|_{M_1}$. Пусть f обозначает росток F вдоль S^n и h обозначает ограничение $F|_{S^n}$. Точки глобального максимума и минимума функции h являются гомологически существенными, других гомологически существенных точек нет, поскольку гомологии сферы S^n двумерны.

Точка глобального максимума (минимума) функции h внутренняя (внешняя, соответственно) для f (рассматриваемого как росток вдоль границы B^{n+1}), поскольку у \tilde{F} нет критических точек. Все остальные критические точки функции h разложены в непересекающиеся пары. Поэтому множество V_Γ всех вершин графа $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{E}}(f, B^{n+1})$ содержит одну вершину типа $\bullet \downarrow \circ$, соответствующую глобальному максимуму функции h , одну вершину типа $\circ \uparrow_{n+1}$, соответствующую глобальному минимуму h , и все остальные вершины типов $\circ \uparrow$ и $\circ \downarrow$, поскольку для B^{n+1} все числа d_k равны нулю.

Пусть (Σ, s) раскраска графа Γ . Напомним, что мы обозначаем через V_Σ дополнение к множеству концов ребер из Σ . Рассмотрим линейно упорядоченное множество A , содержащее B_f и тотально разложимый дифференциал $\delta \in \mathcal{D}_{A, B_f, C_f}$ построенный в лемме 6.4 такой что δ не содержит глифов типа $\circ \uparrow$ и порождающий (Σ, s) . По определению

$$P(t) = \sum_{a \in A \setminus (B_f \cup (C_f)_+)} t^{\deg(a)} = \sum_{v \in V_\Sigma} t^{\deg(v) + s(v)}.$$


Мы явно разложим $\sum_{a \in A \setminus (B_f \cup (C_f)_+)} t^{\deg(a)}$ в сумму $P_{\mathbb{E}}(M) + (1+t)Q(t)$.

Заметим, что δ не содержит глифов типов $\bullet \downarrow \circ$, $\circ \uparrow_{n+1}$, $\circ \uparrow$ и $\circ \downarrow$. Действительно, $\bullet \downarrow \circ$ невозможен, поскольку он должен содержать глобальный максимум, который является единственной гранично существенной гомологической точкой, но наличие такого глифа противоречило бы максимальности. Аналогично, глиф типа $\circ \uparrow_{n+1}$ должен содержать глобальный минимум, но это противоречит его минимальности. Глифы $\circ \uparrow$ и $\circ \downarrow$ невозможны, поскольку они дают вклад в относительные гомологии, но относительные гомологии диска одномерны одномерны и они содержатся в единственном глифе $\bullet \downarrow \circ$, порожденном глобальным максимумом функции h . Следовательно, вершины соответствующие глобальному максимуму и глобальному минимуму функции h принадлежат V_Σ .


Мы опишем V_Σ в терминах следующего отображения $n_\Sigma: V_\Gamma \rightarrow V_\Gamma$. Положим $n_\Sigma(v) = v$ для вершин порожденных глобальными максимумом и минимумом функции h . Каждая внешняя (внутренняя) критическая точка $f|_{S^n}$ относительно B^{n+1} есть внутренняя (соотв. внешняя) крити-

ческая точка $f|_{S^n}$ относительно M_1 . Таким образом, есть естественное соответствие между вершинами типа $\bigcirc_{\neq k}$ в Γ и вершинами типа $\bigcirc_{\neq k+1}$ в $\Gamma(f, M_1)$. Аналогично есть естественное соответствие между вершинами типа $\bigcirc_{\neq k+1}$ в Γ и вершинами типа $\bigcirc_{\neq k}$ в $\Gamma(f, M_1)$.

Определим $n_\Sigma(v)$ для вершины v типа $\bigcirc_{\neq k}$. Вершина v соответствует вершине $u_1 \in V_{\Gamma(f, M_1)}$ типа $\bigcirc_{\neq k+1}$ в $\Gamma(f, M_1)$. Поскольку у \tilde{F} нет критиче-

ских точек, u_1 есть часть глифа  в M -модели функции \tilde{F} . Рассмотрим вершину $u_2 \in V_{\Gamma(f, M_1)}$ типа $\bigcirc_{\neq k}$ входящую в этот глиф. Эта вершина соответствует вершине $u \in V_\Gamma$ типа $\bigcirc_{\neq k+1}$. Положим $n_\Sigma(v) = u$.


Если v вершина типа $\bigcirc_{\neq k+1}$, то мы положим $n_\Sigma(v) = v$ если $v \in V_\Sigma$.










Если $v \notin V_\Sigma$, то v входит в глиф типа  из δ . Этот глиф содержит вершину $u \in V_\Gamma$ типа $\bigcirc_{\neq k}$. Положим $n_\Sigma(v) = u$.

Отметим, что если $n_\Sigma(v) \neq v$ и $v = (b_i, b_j)$, $i > j$, то $n_\Sigma(v) = (b_m, b_n)$ при некоторых n, m таких что $i > m > n > j$. Из этого следует, что n_Σ не имеет периодических вершин с (минимальным) периодом больше единицы. Второе замечание: прообраз вершины v при отображении n_Σ содержит не больше одной вершины отличной от v . Следовательно, V_Γ разлагается в несвязное объединение следующих *цепей*. Мы назовем упорядоченное подмножество $\{v_1, \dots, v_k\}$ Σ -цепью если или $k = 1$, $v_1 = n_\Sigma(v_1)$ и $n_\Sigma^{-1}(v_1) = \{v_1\}$ или $k > 1$, $n_\Sigma^{-1}(v_1) = \emptyset$, $n_\Sigma(v_i) = v_{i+1} \neq v_i$ при $i < k$ и $n_\Sigma(v_k) = v_k$, мы скажем, что k есть длина Σ -цепи. Мы заключаем, что V_Γ распадается в объединение непересекающихся Σ -цепей.








Каждая Σ -цепь вносит один или два монома в


$$P(t) = \sum_{a \in A \setminus (B_f \cup (C_f)_+)} t^{\deg(a)}.$$

Глобальные максимум и минимум функции h порождают Σ -цепи длины 1 и эти цепи вносят мономы t^{n+1} и t^0 в $P(t)$. Рассмотрим теперь остальные Σ -цепи. Для любой вершины v типа $\bigcirc_{\neq k}$ при некотором k , $n_\Sigma(v) \neq v$. Поэтому каждая цепь заканчивается в вершине из V_Σ и эта вершина соответствует глифу типа  в δ . Рассмотрим теперь цепи начинающиеся в вершине типа $\bigcirc_{\neq k+1}$. Каждая такая цепь вносит один ровно моном t^{k+1} в $P(t)$.

Пусть M^{n+1} ориентируемо или $\text{char}(\mathbb{E}) = 2$. В этом случае глобальный максимум функции h соответствует глифу типа  M -модели функции \tilde{F} , и M -модель \tilde{F} не содержит глифов типа ¹. Поэтому вершины типа  _{$k+1$} в которых начинаются Σ -цепи находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами типа  _{k} графа $\Gamma(f, M_1)$, которые могут входить только в глифы типов  и ¹. Число глифов типа  в M -модели функции \tilde{F} равно $b_{k+1}^{\mathbb{E}}(M)$ при $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Следовательно, Σ -цепи, начинающиеся из вершин соответствующих этим глифам вносят $\sum_{i=1}^n b_i^{\mathbb{E}}(M)$ в $P(t)$. Каждому глифу типа ¹ в M -модели функции \tilde{F} естественно соответствуют две Σ -цепи и они вносят $t^l + t^{l+1} = t^l(1+t)$ в $P(t)$ при некотором l . Следовательно, общий вклад в $P(t)$ Σ -цепей, начинающихся в вершинах типа  равен $\sum_{i=1}^n b_i^{\mathbb{E}}(M) + (1+t)K(t)$, где все коэффициенты K неотрицательны. Поэтому, $P(t)$ разлагается в сумму:

$$P(t) = t^{n+1} + t^0 + \sum_{i=1}^n b_i^{\mathbb{E}}(M) + (1+t)K(t) + R(t),$$

где $R(t)$ – вклад от Σ -цепей, начинающихся в вершинах типа . Каждая такая цепь начинается или из вершины лежащей в V_{Σ} (эти вершины соответствуют глифам типов ¹ и  в δ) или концам ребер из Σ , которые порождают глифы типа ¹ в δ . Все цепи, соответствующие ¹ и  дают два элемента соседних степеней в $A \setminus (B_f \cup (C_f)_+)$, и следовательно, вносят вклад $t^l + t^{l+1}$ при некотором l в $P(t)$. Каждый глиф типа ¹ в δ порождает две Σ -цепи и эти цепи также дают два элемента соседних степеней в $A \setminus (B_f \cup (C_f)_+)$. Следовательно, $R(t) = (1+t)N(t)$, где все коэффициенты многочлена N целые неотрицательные.

Оставшийся случай, когда многообразие M^{n+1} неориентируемо и $\text{char}(\mathbb{E}) \neq 2$, немного отличается. В этом случае M -модель \tilde{F} содержит ровно один глиф типа ¹ (содержащий глобальный максимум функции

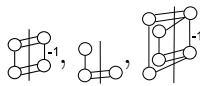
h). Этот глиф порождает одну Σ -цепь, которая вносит t^n в $P(t)$. Поэтому в этом случае

$$P(t) = t^{n+1} + t^n + P_{\mathbb{E}}(M)(t) + (1+t)K(t) + (1+t)N(t),$$

в использованных выше обозначениях. \square

8.4. Классические неравенства Морса для $N \times S^1$. Рассмотрим росток f примера Арнольда, построенного по многообразию W^{n+1} , являющемуся произведением замкнутого связного многообразия N и окружности S^1 . Более точно, пусть B^{n+1} вложенный в $N \times S^1$ шар, H строгая функция Морса на $N \times S^1$ и f строгоморсовский росток F вдоль ∂B^{n+1} . Мы покажем, что $P_{\mathbb{E}}(B^{n+1}) - P_-(f, B^{n+1}) = -(1+t)Q(t)$ для многочлена Q с неотрицательными коэффициентами. Из этого следует, что классические неравенства Морса не гарантируют ни одной критической точки любого продолжения ростка f на B^{n+1} .

Обозначим через \tilde{F} ограничение функции F на $M_1 = ((N \times S^1) \setminus B^{n+1}) \cup S^n$ и обозначим ее M -модель через $\mathcal{M}(\tilde{F})$. Рассмотрим случай ориентируемого многообразия N или $\text{char}(\mathbb{E}) = 2$. В этом случае глобальный максимум функции $f|_{S^n}$ входит в единственный в $\mathcal{M}(\tilde{F})$ глиф типа $\circ \uparrow \circ$, глобальный минимум функции $f|_{S^n}$ входит в единственный в $\mathcal{M}(\tilde{F})$ глиф типа $\circ \downarrow \circ$. все остальные глифы в $\mathcal{M}(\tilde{F})$ это глифы типов $\circ \uparrow \downarrow \circ$,




и $\circ \downarrow \uparrow \circ$, поскольку у \tilde{F} нет критических точек и $\partial M_1 = S^n$.

Многочлен $P_-(f, B^{n+1}) - P_{\mathbb{E}}(B^{n+1})$ следующим образом выражается через глифы входящие в $\mathcal{M}(\tilde{F})$:

$$\sum \left(\# \circ \uparrow \downarrow \circ_{k-1} + \# \circ \downarrow \uparrow \circ_{k-1} + \# \circ \uparrow \downarrow \circ_{k-1} \right) t^{k-1} (1+t) + \sum \# \circ \downarrow \circ_{k-1} t^{k-1} + t^n - 1.$$

Поэтому достаточно показать, что $\sum \# \circ \downarrow \circ_{k-1} t^{k-1} + t^n - 1$ делится на $(1+t)$ и результат деления есть многочлен с неотрицательными коэффициентами. В самом деле, последний многочлен есть равен $\frac{1}{t}(P_{\mathbb{E}}(M)(t) - 1) - 1$. По формуле Кюннета $P_{\mathbb{E}}(M)(t) = (1+t)P_{\mathbb{E}}(N)(t)$ мы получаем: $t^{-1}(P_{\mathbb{E}}(M)(t) - 1) - 1 = t^{-1}(1+t)(P_{\mathbb{E}}(N)(t) - 1)$. Коэффициенты многочлена $t^{-1}(P_{\mathbb{E}}(N)(t) - 1)$ очевидно неотрицательны.

Случай, в котором N неориентируемо и $\text{char}(\mathbb{E}) \neq 2$, аналогичен. Формула для многочлена $P_-(f, B^{n+1}) - P_{\mathbb{E}}(B^{n+1})$ отличается дополнительным

слагаемым t^{n-1} , поскольку глобальный максимум является частью базис
 глифа типа , который вносит $t^{n-1} + t^n$ в $P_-(f, B^{n+1})$. Однако много-
 член $\sum \# \text{link}_{k-1} t^{k-1} + t^n + t^{n-1} - 1$ равен $\frac{1}{t}(P_{\mathbb{E}}(M)(t) - 1) - 1 + t^n + t^{n-1}$
 к которому применимы предыдущие рассуждения.

Список литературы

- [1] Arnold, V. I. Arnold's problems (in Russian)// Moscow, FAZIS, 2000.
- [2] M. Goresky, R. MacPherson, *Stratified Morse theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 14. Springer-Verlag, Berlin, 1988. xiv+272 pp.
- [3] S. A. Barannikov, *The framed Morse complex and its invariants*, Advances in Soviet Mathematics, Vol. 21, V. I. Arnold Ed., 1994, 93–115.
- [4] M. Borodzik. A. Némethi. A. Ranicki. *Morse theory for manifolds with boundary*. *Algebr. Geom. Topol.* 16 (2) 971 - 1023, 2016. <https://doi.org/10.2140/agt.2016.16.971>
- [5] J. Cerf, *Stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **239** (1970), 371–372.
- [6] Chekanov Yu.V., Pushkar' P.E., Combinatorics of wave fronts. Arnold's four-cusp conjecture and invariants of legendrian knots. *Russian Math. Surveys.* (2005), no. 1.
- [7] S. Blanck, F. Laudenbach, *Extension à une variété de dimension 2 d'un germe de fonction donné le long de bord*, C.R. Acad. Sci., Paris **270**, (1970), 1663-1665.
- [8] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Publications mathématiques de l'IHES, tom 68 (1988), pp 99-114
- [9] C. Curley, *Non-singular extension of Morse functions*, *Topology*, Vol. 16, (1977), 89–97.
- [10] J. Milnor, *Morse theory*, Annals Studies 51, Princeton, N.J. (1963).

- [11] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow Princeton University Press, Princeton, N.J. 1965 v+116 pp.
- [12] M. Morse, *Relations Between the Critical Points of a Real Function of n Independent Variables*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 27, No. 3 (Jul., 1925), pp. 345–396
- [13] M. Morse, *The analysis and analysis-situs of regular n -spreads in $(n+r)$ -space*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 13 (1927), 813–817.
- [14] M. Morse, G. B. Van Schaack, *The critical point theory under general boundary conditions*, Ann. of Math. (2) 35 (1934), no. 3, 545–571.
- [15] M. Schwartz, *Morse homology*, Progress in Mathematics, 111. Birkhuser Verlag, Basel, 1993. x+235 pp.
- [16] A. Banyaga, D. Hurtubise, *Lectures on Morse homology*, Kluwer Texts in the Mathematical Sciences, 29. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2004. x+324 pp.
- [17] F. Laudenbach, appendix to the paper: J-M. Bismut, W. Zhang *An extension of a theorem by Cheeger and Muller*. Asterisque No. 205 (1992), 235 pp.
- [18] Hatcher A., Wagoner J. Pseudo-isotopies of compact manifolds // Asterisque, **6**, 1973, 3–274
- [19] P. Kronheimer, T.Mrowka, *Monopoles and Three-Manifolds*, Cambridge University Press, 2007, 808 pp
- [20] Pushkar, P. E. *On functions, all of whose critical points are contained in a ball*. Funct. Anal. Appl. 36 (2002), no. 4, 321–323
- [21] P. Pushkar, M. Tyomkin, *Enhanced Bruhat decomposition and Morse theory*, <https://arxiv.org/pdf/2012.05307v2.pdf>
- [22] A. G. Khovanskii, *Sums of finite sets, orbits of commutative semigroups, and Hilbert functions*. Functional Analysis and Its Applications volume 29, pp. 102–112 (1995)

- [23] F. Takens, J. White *Morse Theory of Double Normals of Immersions*. Indiana University Mathematics Journal Vol. 21, No. 1 (July, 1971), pp. 11-17
- [24] Jankowski, A.; Rubinsztein, R. *Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary*. Comment. Math. Prace Mat. 16 (1972), pp. 99-112.
- [25] M. E. Zadeh, *Morse inequalities for manifolds with boundary* Journal of the Korean Mathematical Society 47(1), pp.123-134, 2010
- [26] V. Benci, K. D. Rezende, *Maximal Poincaré polynomials and minimal Morse functions*, PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 129, Number 12, pp. 3511–351, 2001